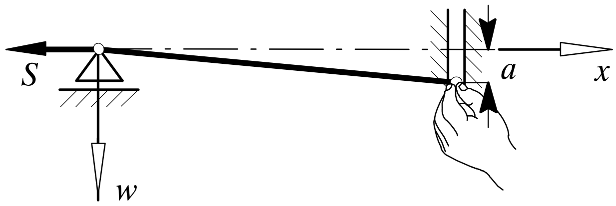
8 Freie Schwingungen kontinuierlicher Systeme

Aufgabe 1

Eine Saite (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ) unter Vorspannung S ist am linken Ende fest eingespannt, am rechten, freien Ende wird sie um a ausgelenkt und anschließend losgelassen.



a) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen und normierten Eigenfunktionen der Saite.

b) Wie lautet die allgemeine Lösung?

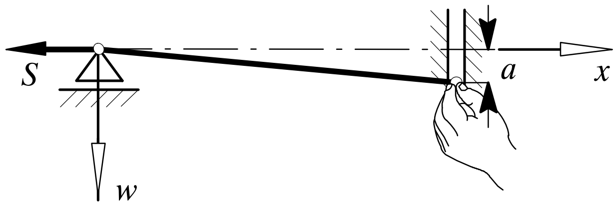
c) Beschreiben Sie die Anfangsbedingung durch $w_0(x)$ und $\dot{w}_0(x)$.

d) Bestimmen Sie die freien Konstanten der allgemeinen Lösung für die gegebene Anfangsbedingung.

e) Skizzieren Sie die momentane Form der Saite für die Zeitpunkte $t = L/c$ und $t = 2L/c$ mit $c = \sqrt{S/\varrho A}$.

Aufgabe 2

Die Saite (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ, Vorspannung S) aus Aufgabe 1 soll nun mit Hilfe der Modalanalyse untersucht werden, wobei nur die ersten beiden Moden berücksichtigt werden.



a) Wie lauten dann hier die modal entkoppelten Schwingungsgleichungen $\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$?

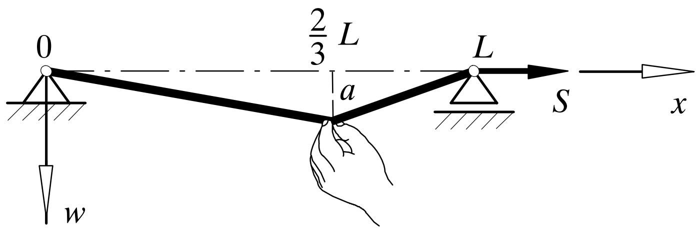
b) Bestimmen Sie die modalen Anfangsbedingungen $\boldsymbol{y}(0)$ und $\dot{\boldsymbol{y}}(0)$.

c) Berechnen Sie die modalen Lösungen $y_k(t)$, $k = 1, 2$.

d) Welche Lösung $w(x, t)$ ergibt sich daraus durch Rücktransformation?

Aufgabe 3

Die normierten Eigenfunktionen einer fest-fest eingespannten Saite (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ, Vorspannung S) lauten



$$W_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, ...$$

Die Saite wird außermittig bei $x = 2L/3$ um a ausgelenkt und aus der Ruhe losgelassen.

a) Bestimmen Sie die modalen Anfangsbedingungen $y_k(0)$ und $\dot{y}_k(0)$.

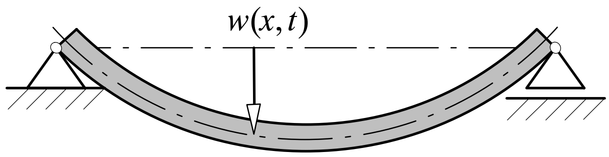
b) Berechnen Sie die modalen Lösungen $y_k(t)$, $k = 1, 2$.

c) Welche Lösung $w(x, t)$ ergibt sich daraus durch Rücktransformation?

d) Skizzieren Sie Auslenkung, die sich für $t = 0$ näherungsweise aus den ersten beiden Moden ergibt.

Aufgabe 4

Ein Balken (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI) mit gelenkigen Lagern hat die normierten Eigenfunktionen



$$W_k(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\frac{k\pi x}{L}, \quad k = 1, 2, ...$$

Ermitteln Sie mit Hilfe der Modaltransformation die Schwingungen $w(x, t)$ des Balkens, wenn er aus der Anfangskonfiguration

$$w_0(x) = a \sin\frac{\pi x}{L}$$

losgelassen wird.