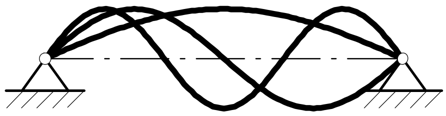
6 Eigenlösungen der eindimensionalen Wellengleichung

Aufgabe 1

Die nicht normierten Eigenfunktionen der eindimensionalen Wellengleichung lauten für eine fest–feste Einspannung an den Rändern



$$W_k(x) = D_k \sin\frac{k\pi x}{L}, \quad D_k \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, ...$$

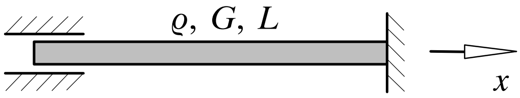
a) Zeigen Sie durch Integration, dass die Eigenfunktionen orthogonal sind, d.h. für beliebige $i \neq j$ gilt

$$\int_0^L W_i(x)\, W_j(x)\, dx = 0 .$$

b) Normieren Sie die Eigenfunktionen.

Aufgabe 2

Ein homogener Rundstab (Länge $L = 1\ \mathrm{m}$, Dichte $\varrho = 7800\ \mathrm{kg/m^3}$, Schubmodul $G = 75000\ \mathrm{MPa}$) ist am linken Ende frei drehbar gelagert, am rechten Ende ist er fest eingespannt.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für Torsionsschwingungen $\varphi(x,t)$ des Stabes?

b) Formulieren Sie die Randbedingungen.

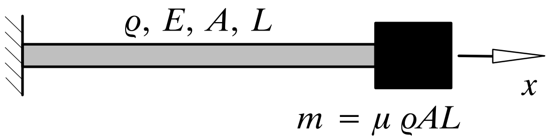
c) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf.

d) Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen. Welchen Einfluss hat der Stabdurchmesser auf die Eigenfrequenzen eines Torsionsstabes?

e) Berechnen Sie die ersten beiden Eigenfrequenzen und skizzieren Sie die zugehörigen Eigenformen.

Aufgabe 3

Ein homogener Rundstab (Länge $L = 1\,\mathrm{m}$, Querschnitt $A = 1\,\mathrm{cm}^2$, Dichte $\varrho = 7800\,\mathrm{kg/m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 210\,000\,\mathrm{MPa}$) ist am linken Ende fest eingespannt, am rechten Ende trägt er eine Endmasse $m = \mu\,\varrho AL$, $\mu \geq 0$.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes?

b) Formulieren Sie die Randbedingungen.

c) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf.

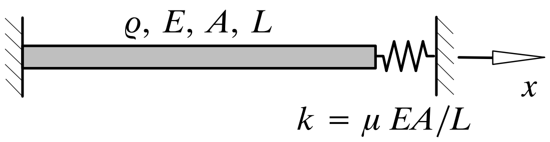
d) Wie groß ist die Grundeigenfrequenz des Stabes ohne Endmasse ($\mu = 0$)?

e) Bestimmen Sie graphisch die Grundeigenfrequenz für $\mu = 1$.

f) Berechnen und skizzieren Sie die Grundeigenschwingungsformen des Stabes mit und ohne Endmasse.

Aufgabe 4

Ein homogener Rundstab (Länge $L = 1\,\mathrm{m}$, Querschnitt $A = 1\,\mathrm{cm}^2$, Dichte $\varrho = 7800\,\mathrm{kg/m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 210\,000\,\mathrm{MPa}$) ist am linken Ende fest eingespannt, am rechten Ende ist er mit der Steifigkeit $k = \mu\,EA/L$, $\mu \geq 0$ abgefedert.



a) Wie lautet die Bewegungsgleichung für Längsschwingungen $u(x,t)$ des Stabes?

b) Formulieren Sie die Randbedingungen.

c) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf.

d) Bestimmen Sie graphisch die Grundeigenfrequenz für $\mu = 1$.

e) Zeigen Sie, dass für $\mu \to \infty$ die Eigenfrequenzen in den Fall einer festen Einspannung, für $\mu = 0$ in den Fall eines freien Stabendes übergehen.