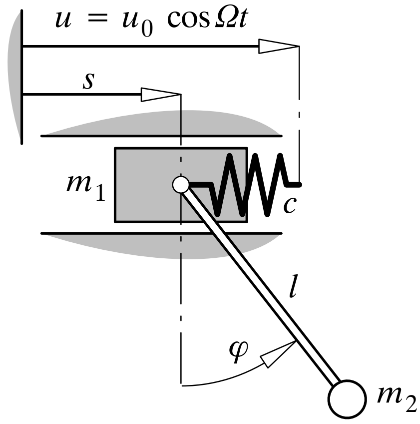
4 Erzwungene Schwingungen konservativer Schwingungssysteme

Aufgabe 1

Die Laufkatze eines Modellkrans (Masse $m_1 = 0.1\ \mathrm{kg}$, Fesselungssteifigkeit $c = 14.4\ \mathrm{N/m}$) wird durch harmonische Motorbewegungen (Amplitude u_0) zu Schwingungen angeregt, woraus auch Schwingungen der Last (Masse $m_2 = 0.288\ \mathrm{kg}$, Pendellänge $l = 0.3924\ \mathrm{m}$) resultieren. Die Bewegungsgleichungen lauten mit $\boldsymbol{y} = [s\ \ \varphi]^T$



$$\begin{bmatrix} 0.388 & 0.113 \\ 0.113 & 0.044 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} 14.4 & 0 \\ 0 & 1.109 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 14.4\,u_0 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\Omega t\ .$$

Für $u_0 = 0$ findet man die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 4\ \mathrm{rad/s}$ und $\omega_2 = 15\ \mathrm{rad/s}$, sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = c_1\,[1\ \ 4.53]^T$, $\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = c_2\,[1\ \ -2.87]^T$.

a) Normieren Sie die Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix. Wie lautet die Modalmatrix der massenorthogonalen Eigenvektoren?

b) Zunächst sollen freie Schwingungen ($u_0 = 0$) nach einer Auslenkung der Laufkatze betrachtet werden, d.h. $\boldsymbol{y}(0) = [0.1\ \ 0]^T$, $\dot{\boldsymbol{y}}(0) = [0\ \ 0]^T$. Wie lauten die zugehörigen modalen Anfangsbedingungen?

c) Bestimmen Sie die modalen Lösungen für diese Anfangsbedingungen.

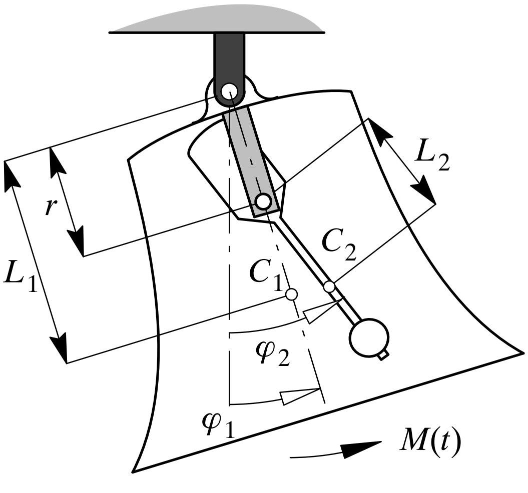
d) Welche freien Schwingungen $\boldsymbol{y}(t)$ entwickeln sich aus den Anfangsbedingungen?

e) Die Laufkatze werde nun harmonisch mit $u_0 = 0.01\ \mathrm{m}$ erregt. Wie lautet der zugehörige modale Erregervektor?

f) Bestimmen Sie die Partikulärlösung für diese Erregung durch Superposition der modalen Partikulärlösungen.

Aufgabe 2

Die bereits aus den Übungen zu Kapitel 3 bekannte Kirchenglocke soll durch ein harmonisches Antriebsmoment $M(t) = M_0 \cos\Omega t$ am Glockenkörper zu Schwingungen angeregt werden. Mit den Zahlenwerten $m_1 = 500\ \mathrm{kg}$, $m_2 = 20\ \mathrm{kg}$, $I_1 = 67.709\ \mathrm{kg\,m^2}$, $I_2 = 2.675\ \mathrm{kg\,m^2}$, $L_1 = 0.6018\ \mathrm{m}$, $L_2 = 0.4077\ \mathrm{m}$, $r = 0.2453\ \mathrm{m}$, $M_0 = 100\ \mathrm{Nm}$ und dem Lagevektor $\boldsymbol{y} = [\varphi_1\ \ \varphi_2]^T$ findet man die Bewegungsgleichungen



$$\begin{bmatrix} 250 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} 3000 & 0 \\ 0 & 80 \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 100 \\ 0 \end{bmatrix}\cos\Omega t\ .$$

Eine Eigenschwingungsanalyse liefert die Eigenfrequenzen $\omega_1 = 3.43\,\mathrm{rad/s}$ und $\omega_2 = 3.69\,\mathrm{rad/s}$, sowie die zugehörigen Eigenvektoren $\tilde{y}_1 = c_1\,[1 \;\; 2.5]^T$, $\tilde{y}_2 = c_2\,[1 \;\; -15]^T$.

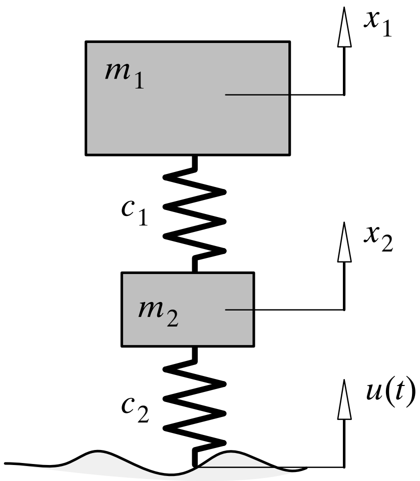
a) Normieren Sie die Eigenvektoren bezüglich der Massenmatrix und bestimmen Sie die Modalmatrix der massenorthogonalen Eigenvektoren.

b) Wie lautet der modale Erregervektor?

c) Bestimmen Sie die Partikulärlösung für die gegebene Erregung durch Superposition der modalen Partikulärlösungen.

<u>Aufgabe 3</u>

Durch Fahrbahnunebenheiten ergeben sich erzwungene Schwingungen des bereits aus den Übungen zu Kapitel 3 bekannten Viertelfahrzeugmodells. Es wird angenommen, dass die Anregung harmonisch ist, d.h. $u(t) = u_0 \cos \Omega t$.



a) Wie lauten die veränderten Bewegungsgleichungen des Systems?

b) Geben Sie die allgemeine Form der Partikulärlösung an. Wie lautet das Gleichungssystem für die Amplituden dieser Partikulärlösung?

c) Aus numerischen Berechnungen findet man für $m_1 = 300\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 20\,\mathrm{kg}$, $c_1 = 7500\,\mathrm{N/m}$, $c_2 = 80000\,\mathrm{N/m}$, $u_0 = 0.01\,\mathrm{m}$ die skizzierten Amplitudengänge für x_1 und x_2 in Abhängigkeit der Erregerfrequenz Ω. Ordnen Sie die beiden Kurven den verallgemeinerten Koordinaten x_1 und x_2 zu.