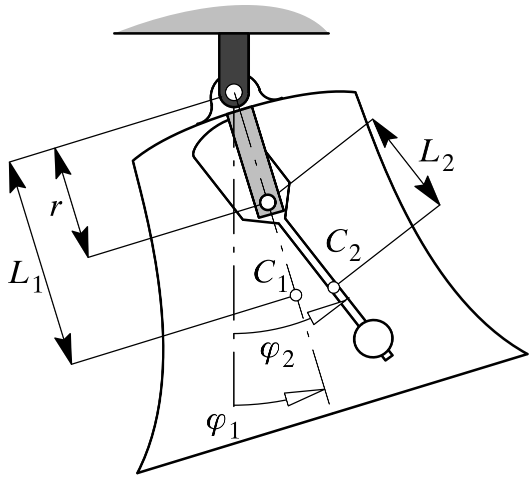
# 3 Freie Koppelschwingungen konservativer Schwingungssysteme




**Aufgabe 1**

Eine Kirchenglocke besteht aus dem Glockenkörper (Schwerpunktsabstand $L_1$, Masse $m_1$, Trägheitsmoment $I_1$ bez. des Schwerpunkts) und dem Klöppel (Schwerpunktsabstand $L_2$, Masse $m_2$, Trägheitsmoment $I_2$ bez. des Schwerpunkts), der am Glockenkörper im Abstand $r$ vom Aufhängepunkt angelenkt ist. Die Auslenkung der Glocke wird durch $\varphi_1$, die des Klöppels durch $\varphi_2$ beschrieben.

a) Ermitteln Sie die kinetische und potentielle Energie des Systems.

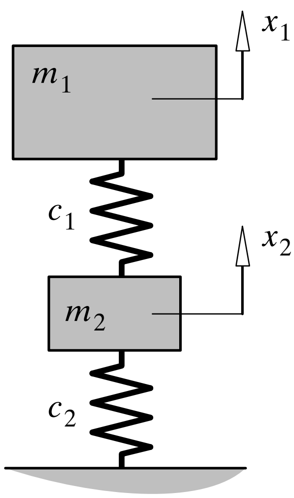
b) Formulieren Sie die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art.

c) Im Jahre 1876 wurde im Kölner Dom eine Glocke installiert, die nicht läuten wollte, weil Glocke und Klöppel synchron schwangen. Unter welcher Bedingung ergibt sich eine Lösung $\varphi_1(t) \equiv \varphi_2(t)$?

d) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichungen für kleine Ausschläge.

e) Berechnen Sie die Schwingungseigenfrequenzen des Systems für $m_1 = 500$ kg, $m_2 = 20$ kg, $I_1 = 67.709$ kg m$^2$, $I_2 = 2.675$ kg m$^2$, $L_1 = 0.6018$ m, $L_2 = 0.4077$ m, $r = 0.2453$ m.

**Aufgabe 2**




Ein verbreitetes Modell zur Untersuchung von Automobilschwingungen ist das Viertelfahrzeug. Es besteht aus der anteiligen Aufbaumasse (Masse $m_1$), die über die Aufbaufeder (Steifigkeit $c_1$) gegen die Achse (Masse $m_2$) abgefedert ist. Diese ist wiederum durch den Reifen (Steifigkeit $c_2$) gegen die Fahrbahn abgefedert. Die Auslenkungen der beiden Massen werden bez. der Gleichgewichtslage gemessen, d.h. die Gewichtskräfte heben sich gegen die Federvorspannungen auf.

a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf.

b) Wie lautet die charakteristische Gleichung?

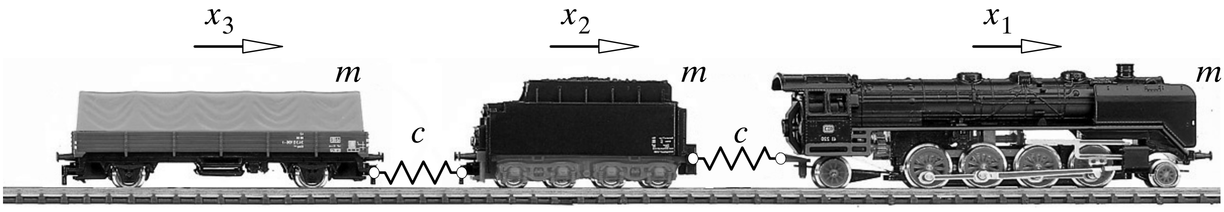
c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems für $m_1 = 300$ kg, $m_2 = 20$ kg, $c_1 = 7500$ N/m, $c_2 = 80000$ N/m.

d) Bestimmen Sie die Amplitudenverhältnisse der zugehörigen Schwingungseigenformen.

e) Skizzieren Sie die Schwingungseigenformen.

**Aufgabe 3**

Eine Lokomotive (Masse $m$) zieht zwei Wagen (Masse $m$), die über die Federsteifigkeit $c$ angekoppelt sind. Lokomotive und Wagen sollen jeweils frei rollen, die Federn sind für $x_1 = x_2$ und $x_2 = x_3$ entspannt.




a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems mit $\mathbf{y} = [x_1 \; x_2 \; x_3]^T$?

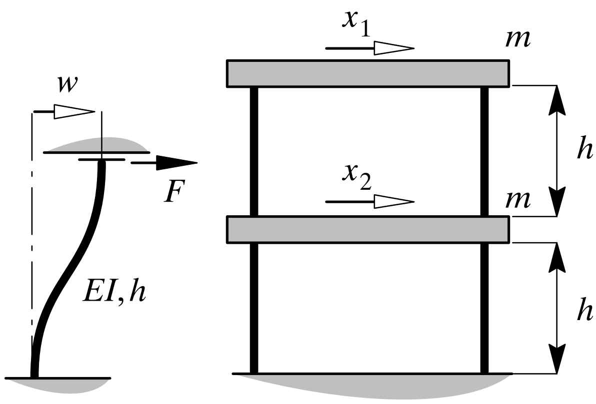
b) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und berechnen Sie die Eigenfrequenzen des Systems für $c/m = 100\,\mathrm{s}^{-2}$.

c) Berechnen Sie die zugehörigen Eigenvektoren und skizzieren Sie die Schwingungseigenformen.

d) Welche Schwingung ergibt sich, wenn die Lokomotive zum Ankuppeln rückwärts mit der Geschwindigkeit $v_o = 1\,\mathrm{m/s}$ auf die ruhenden Wagen auffährt, d.h. $\mathbf{y}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{y}}(0) = [-1 \;\; 0 \;\; 0\,]^T$?

**Aufgabe 4**

Ein zweigeschossiges Gebäude besteht aus zwei Decken (Masse $m$), die durch elastische Säulen (Biegesteifigkeit $EI$, Höhe $h$) abgestützt werden. Die Säulen seien jeweils biegestarr an die Decken angeschlossen. In Handbüchern findet man für diesen Belastungsfall den Zusammenhang $w = Fh^3/(12\,EI)$ zwischen Kraft und Durchbiegung.




a) Wie lauten die Bewegungsgleichungen des Systems?

b) Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf.

c) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren des Systems für $m = 1333$ kg, $E = 210\,000$ MPa, $I = 5000\,\mathrm{cm}^4$, $h = 3$ m.

d) Skizzieren Sie die Schwingungseigenformen.