# 15 Erzwungene Schwingungen

Unwuchten in elastischen Rotoren oder Fahrbahnunebenheiten bei Fahrzeugen führen auf erzwungene Schwingungen. Betrachtet werden soll im Folgenden der Fall der Schwingungserregung durch eingeprägte Kräfte.

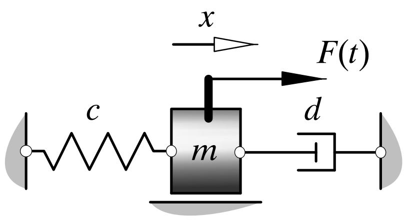
Bei linearen Schwingungssystemen ergibt sich eine Partikulärlösung mit dem Funktionscharakter der Anregung. Sind zusätzlich entsprechende Anfangsbedingungen vorhanden, überlagern sich dieser Partikulärlösung nach dem Superpositionsprinzip homogene Lösungen, die bereits als freie Schwingungen bekannt sind. Bei gedämpften Systemen klingt die homogene Lösung jedoch schnell ab, weshalb man sich meist nur für die stationäre Schwingung in Form der Partikulärlösung interessiert.

Wichtige technische Anregungsfunktionen sind die Sprungerregung, die zum Beispiel in der Regelungstechnik als Testfunktion eingesetzt wird oder beim Überfahren eines Bordsteins entsteht, und die harmonische Erregung, wie sie durch umlaufende Unwuchten entsteht. Bei Sprungerregung stellt sich ein Einschwingen auf eine neue Gleichgewichtslage ein, das die freien Schwingungen widerspiegelt.

Bei harmonischer Erregung folgt das System der Erregung phasenverschoben und amplitudenskaliert mit gleicher Frequenz. Sowohl die sich einstellende Amplitude als auch die Phasenverschiebung hängen von der Erregerfrequenz ab. Für langsame Erregerfrequenzen folgt das System der Erregung ohne Phasenverschiebung. Stimmt die Erregerfrequenz mit der Eigenfrequenz des Systems überein, werden sehr schwach gedämpfte Systeme zu Schwingungen mit großer Amplitude angeregt (Resonanz). Für hohe Erregerfrequenzen kann das träge System der Erregung nicht mehr folgen und geht in Gegentakt mit kleinen Amplituden. In der Nähe der Eigenfrequenz entstehen Schwebungsphänomene, d.h. Schwingungen mit oszillierender Amplitude.

# 15.1 Allgemeine Lösung

Schwingungsgleichung: $\ddot{x} + 2\delta\,\dot{x} + \omega_o^2 x = f(t)$




homogene Lösung: $\ddot{x}_h + 2\delta\,\dot{x}_h + \omega_o^2 x_h = 0$

ungedämpft: $x_h = C\,\cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$

schwach gedämpft: $x_h = C\,e^{-\delta t}\,\cos(\omega t - \varphi)$

Grenzfall: $x_h = e^{-\delta t}\,(A\,t + B)$

stark gedämpft: $x_h = A\,e^{\lambda_1 t} + B\,e^{\lambda_2 t}\ ,\quad \lambda_1\,,\,\lambda_2 < 0$

partikuläre Lösung: $\ddot{x}_p + 2\delta\,\dot{x}_p + \omega_o^2 x_p = f(t)$

→ allgemeine Lösung
durch Superposition: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$

Beweis durch
Einsetzen:

$$\left(\ddot{x}_h + \ddot{x}_p\right) + 2\delta\left(\dot{x}_h + \dot{x}_p\right) + \omega_0^2\left(x_h + x_p\right)$$
$$= \underbrace{\left(\ddot{x}_h + 2\delta\,\dot{x}_h + \omega_0^2 x_h\right)}_{0} + \underbrace{\left(\ddot{x}_p + 2\delta\,\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p\right)}_{f(t)} = f(t)\ \checkmark$$

# 15.2 Sprungerregung

Anwendung: Wichtige Testfunktion der Regelungstechnik, Überfahren eines Randsteins

Erregerfunktion: $f(t) = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad t < 0 \\ f_0 & \textit{für} \quad t \geq 0 \end{cases}$

Ansatz für Partikulärlösung: $x_p(t) = x_G = const.$ für $t \geq 0$

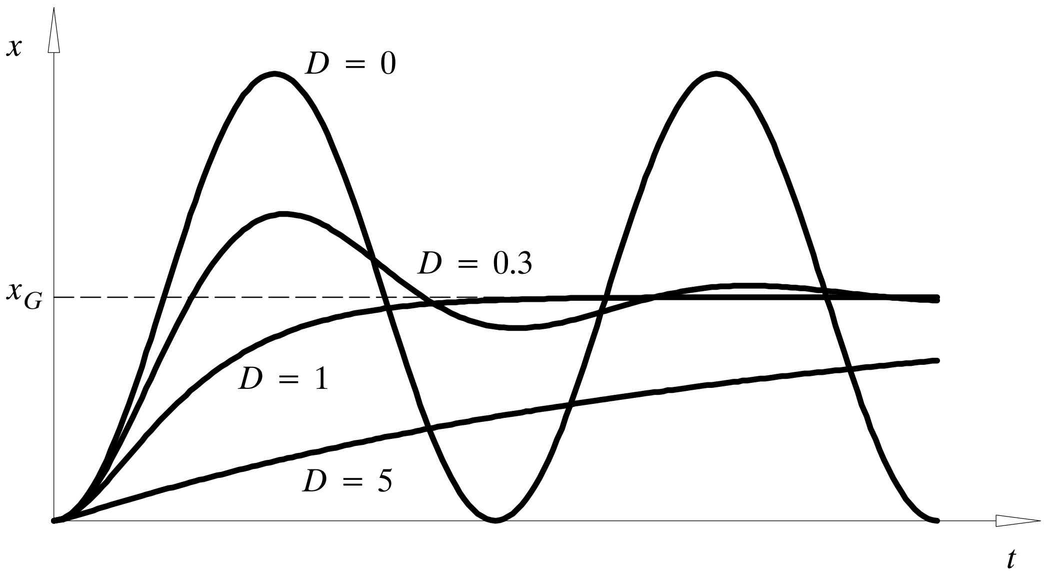
allgemeine Lösung für $x(0) = \dot{x}(0) = 0$:

ungedämpft: $x(t) = x_G \left[ 1 - \cos\omega_0 t \right]$

schwach gedämpft: $x(t) = x_G \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\omega^2}}\, e^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi) \right], \quad \tan\varphi = \frac{\delta}{\omega}$

Grenzfall: $x(t) = x_G \left[ 1 - (1 + \delta t)\, e^{-\delta t} \right]$

stark gedämpft: $x(t) = x_G \left[ 1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t} \right]$



## 15.3 Harmonische Erregung

Anwendung: Maschinen mit umlaufenden Unwuchten, periodische Erregung

Erregerfunktion: $f(t) = f_0 \cos \Omega t$

**Partikulärlösung**

Ansatz: $x_p(t) = r_0 \cos(\Omega t - \psi)$

*Trigonometrie*
$\cos(\Omega t - \psi) = \cos \Omega t \cos\psi + \sin \Omega t \sin\psi$

$$x_p(t) = r_0 \cos\psi \cos \Omega t + r_0 \sin\psi \sin \Omega t$$
$$\dot{x}_p(t) = -r_0 \Omega \cos\psi \sin \Omega t + r_0 \Omega \sin\psi \cos \Omega t$$
$$\ddot{x}_p(t) = -r_0 \Omega^2 \cos\psi \cos \Omega t - r_0 \Omega^2 \sin\psi \sin \Omega t$$

*eingesetzt in*
$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_o^2 x = f_0 \cos \Omega t$

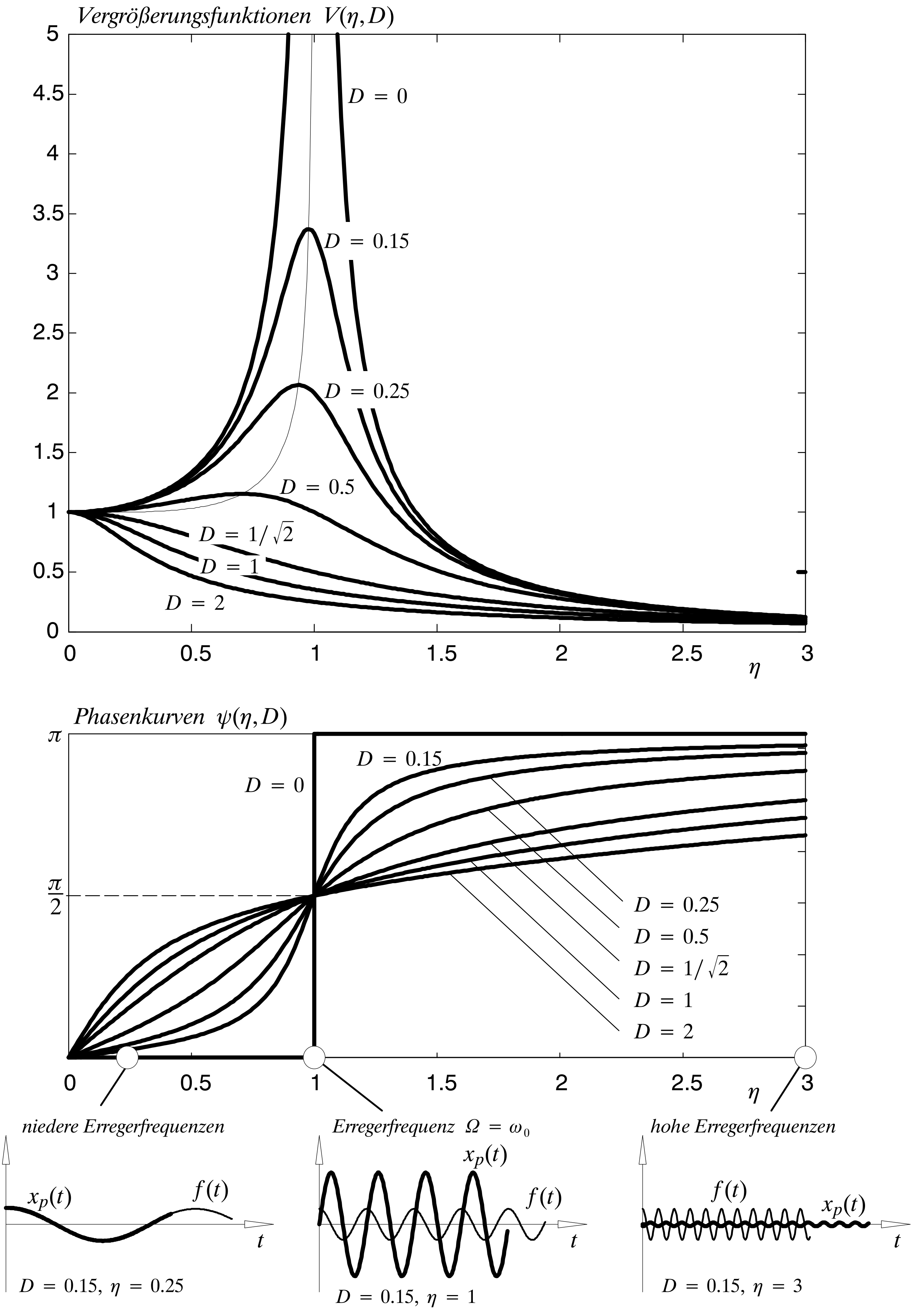
normierte Darstellung:

dimensionslose Erregerfrequenz: $\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$

Lehr'sches Dämpfungsmaß: $D = \dfrac{\delta}{\omega_0}$

Resonanzfunktion: $r_0 = \dfrac{f_0}{\omega_o^2} V(\eta, D)$ mit $V(\eta, D) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + 4D^2\eta^2}}$

Phasenverschiebung: $\psi(\eta, D) = \arctan \dfrac{2D\eta}{1-\eta^2}$


Vergrößerungsfunktionen $V(\eta, D)$
5
4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$\eta$
$D = 0$
$D = 0.15$
$D = 0.25$
$D = 0.5$
$D = 1/\sqrt{2}$
$D = 1$
$D = 2$
Phasenkurven $\psi(\eta, D)$
$\pi$
$\frac{\pi}{2}$
$D = 0.15$
$D = 0$
$D = 0.25$
$D = 0.5$
$D = 1/\sqrt{2}$
$D = 1$
$D = 2$
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
$\eta$
niedere Erregerfrequenzen
Erregerfrequenz $\Omega = \omega_0$
hohe Erregerfrequenzen
$x_p(t)$
$f(t)$
$t$
$D = 0.15,\ \eta = 0.25$
$x_p(t)$
$f(t)$
$t$
$D = 0.15,\ \eta = 1$
$f(t)$
$x_p(t)$
$t$
$D = 0.15,\ \eta = 3$

**Resonanz**

Amplitudenüberhöhung in einem bestimmten Frequenzbereich der Erregung

◇ Erzeugen von Resonanz
(z.B. Rüttelsieb)

geringe Dämpfung $D \to 0$
Anregung mit Eigenfrequenz $\Omega \to \omega_0$

◇ Vermeiden von Resonanz
(Anstreifen von Rotoren, Aufbauschwingung von Fahrzeugen)

1) Frequenzverstimmung $\Omega \ll \omega_0$ unterkritischer Betrieb
$\Omega \gg \omega_0$ überkritischer Betrieb

2) Dämpfung $D > \frac{1}{\sqrt{2}}$ keine Amplitudenüberhöhung

**Allgemeine Lösung des ungedämpften Schwingers** ($\delta = 0$)

Superposition: $x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C\cos(\omega_0 t - \varphi) + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t$

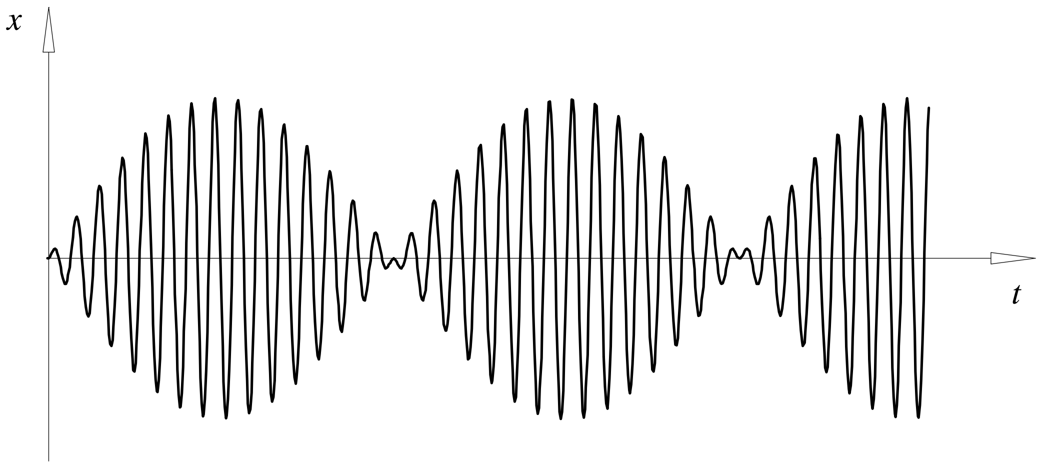
Anfangsbedingungen: $x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\left(\cos\Omega t - \cos\omega_0 t\right)$$

◇ Schwebungen: Amplitudenschwankungen bei Erregung mit Frequenzen nahe der Eigenfrequenz, $\Omega \approx \omega_0$

Trigonometrie $\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\beta+\alpha}{2}$

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t \quad \sin\frac{\omega_0 + \Omega}{2}t \\ &\approx \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\sin\frac{\omega_0 - \Omega}{2}t \quad \sin\omega_0 t \end{aligned}$$




◇ Amplitudenentwicklung in der Resonanz, $\Omega = \omega_0$

$$\Omega \approx \omega_0 : \quad x(t) \approx \frac{2f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} \sin\frac{\omega_0 - \Omega}{2}\, t \quad \sin\omega_0 t$$

Grenzübergang $\Omega \to \omega_0$

$$x(t) \approx \frac{f_0}{2\omega_0}\, t \quad \sin\omega_0 t$$