# 14 Freie Schwingungen

Wird ein System durch Anfangsauslenkungen oder Anfangsstöße zu Schwingungen angeregt und dann sich selbst überlassen, bezeichnet man die entstehende Bewegung als freie Schwingung. Im Falle eines linearen Schwingers mit einem Freiheitsgrad wird sie durch das sogenannte Anfangswertproblem bestehend aus einer homogenen Schwingungsdifferentialgleichung 2. Ordnung und Anfangsbedingungen für Lage und Geschwindigkeit beschrieben.

Für lineare Schwingungsgleichungen besteht ein abgeschlossenes Lösungskonzept zur Berechnung der Schwingungsfunktion. Entsprechend der Schwingungsgleichung wählt man einen parametrisierten Lösungsansatz und bestimmt die freien Parameter durch Einsetzen in die Differentialgleichung. Die gefundenen Einzellösungen können superponiert werden, um zur allgemeinen Lösung zu gelangen. Dabei verbleiben freie Konstanten, die durch Einsetzen in die Anfangsbedingungen ermittelt werden und auf eine spezielle Lösung des Anfangswertproblems führen.

Ungedämpfte Schwingungen können durch trigonometrische Funktionen beschrieben werden. Charakteristische Kennwerte der Schwingung sind ihre Amplitude und Frequenz. Zu unterscheiden sind dabei die Frequenz gemessen in Hertz $[\mathrm{Hz}]$ als Kehrwert der Schwingungsperiode und die Kreisfrequenz gemessen in $[\mathrm{rad/s}]$.

Bei gedämpften Schwingungen sind verschiedene Fälle der Dämpfung zu unterscheiden, die durch das Lehr'sche Dämpfungsmaß charakterisiert sind. Für schwache Dämpfung bleibt das System schwingungsfähig und wird durch trigonometrische Funktionen mit exponentiell abklingender Amplitude beschrieben. Bei starker Dämpfung geht die Schwingungsfähigkeit verloren, die Lösungsverläufe sind dann Exponentialfunktionen.

# 14.1 Lineare Schwingungsgleichung

## Anfangswertproblem

Schwingungsgleichung: $\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

Anfangsbedingungen: Lage: $x(0) = x_0$
Geschwindigkeit: $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

## Superpositionsprinzip

Sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Lösungen der linearen Schwingungsgleichung, dann auch

- ◇ $x(t) = c\,x_1(t)\ ,\quad c = const.$
- ◇ $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Beweis durch Einsetzen:

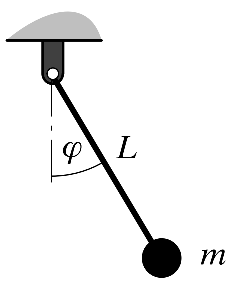
◇ $(c\,\ddot{x}_1) + 2\delta(c\,\dot{x}_1) + \omega_0^2(c\,x_1) = c\,\underbrace{(\ddot{x}_1 + 2\delta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1)}_{0} = 0$ ✓

◇ $(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + 2\delta\,(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) + \omega_0^2\,(x_1 + x_2)$
$= \underbrace{(\ddot{x}_1 + 2\delta\,\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1)}_{0} + \underbrace{(\ddot{x}_2 + 2\delta\,\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2)}_{0} = 0$ ✓

## Beispiele

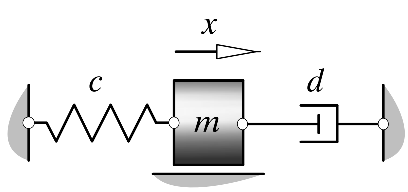
Linearisierte Pendelschwingung $\varphi \ll 1$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\varphi = 0$$




Feder-Masse-Schwinger

$$\ddot{x} + \frac{d}{m}\,\dot{x} + \frac{c}{m}\,x = 0$$



# 14.2 Ungedämpfte Schwingungen

**Anfangswertproblem**

Schwingungsgleichung: $\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$

Anfangsbedingungen: Lage: $x(0) = x_0$
Geschwindigkeit: $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

**Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung**

Lösungsansätze: $x_1(t) = \sin \omega t$

$x_2(t) = \cos \omega t$

Superposition: $x(t) = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t \,, \quad A, B \in \mathbb{R}$

**Spezielle Lösung des Anfangswertproblems**

Anfangsbedingungen: $x(0) = x_0$

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

Lösung: $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \dfrac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t$

Trigonometrie: $\cos(\psi - \varphi) = \cos\varphi \cos\psi + \sin\varphi \sin\psi$

$x(t) = C \cos\left(\omega_0 t - \varphi\right)$

Kenngrößen:

| | | |
|---|---|---|
| Periode | $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ | $[\mathrm{s}]$ |
| Frequenz | $f = \dfrac{1}{T}$ | $1\,[Hz] = 1 \left[\dfrac{1}{s}\right]$ |
| Kreisfrequenz | $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$ | $\left[\dfrac{\mathrm{rad}}{s}\right]$ |


x
C
− C
φ/ω0
t

# 14.3 Gedämpfte Schwingungen

**Anfangswertproblem**

Schwingungsgleichung: $\ddot{x}(t) + 2\delta\,\dot{x}(t) + \omega_0^2\,x(t) = 0$

Anfangsbedingungen: Lage: $x(0) = x_0$
Geschwindigkeit: $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$

**Allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung**

Lösungsansatz: $x(t) = e^{\lambda t}$

Superposition: $x(t) = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t}\ , \quad C_1\,,\,C_2 \in \mathbb{C}$

**Diskussion der Eigenwerte**

allgemein: $\lambda_{1,2} = -\,\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Fallunterscheidung: 1) keine Dämpfung $\delta = 0$

2) schwache Dämpfung $\delta^2 < \omega_0^2$

3) Grenzfall $\delta^2 = \omega_0^2$

4) starke Dämpfung $\delta^2 > \omega_0^2$

**Diskussion der Lösungen**

1) keine Dämpfung $\delta = 0$

$$x(t) = C_1 e^{i\omega_0 t} + C_2 e^{-i\omega_0 t}$$

Euler−Formel $e^{\pm i\omega_0 t} = \cos\omega_0 t \pm i \sin\omega_0 t$

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos\omega_0 t + i\,(C_1 - C_2)\sin\omega_0 t$$

2) schwache Dämpfung $0 < \delta < \omega_0$

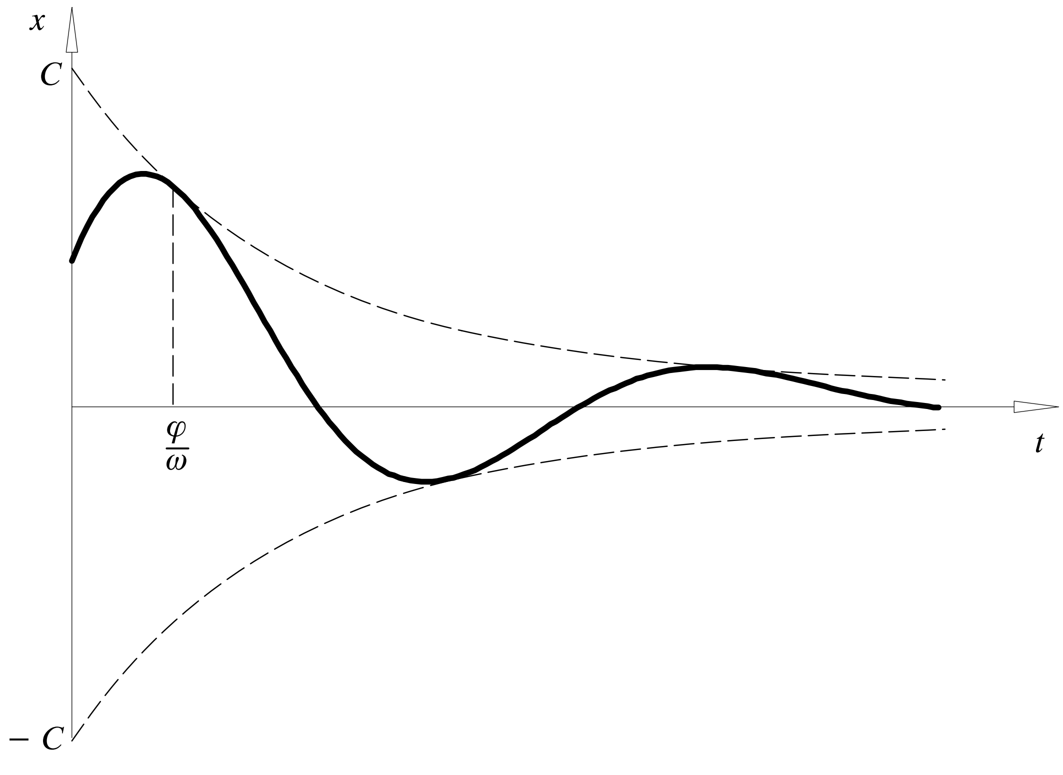
$$x(t) = C_1 e^{(-\delta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\delta - i\omega)t}$$
$$= e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)$$

Euler−Formel

$$x(t) = e^{-\delta t}(A\sin\omega t + B\cos\omega t)$$

Trigonometrie

$$x(t) = C e^{-\delta t}\cos(\omega t - \varphi)$$



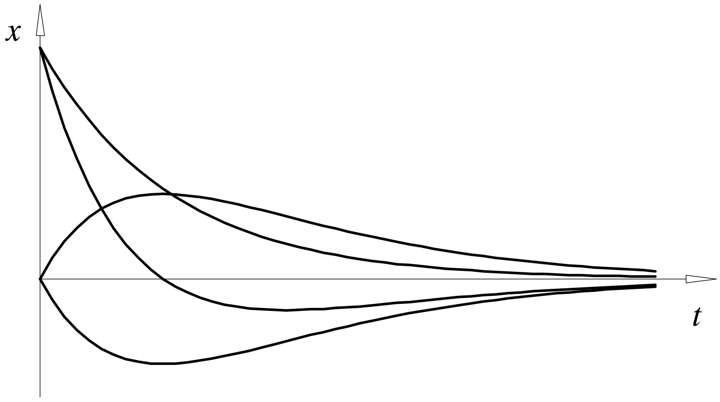
| | | | |
|---|---|---|---|
| Kenngrößen: | Kreisfrequenz | $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ | $\left[\frac{\text{rad}}{s}\right]$ |
| | Periode | $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ | $[\text{s}]$ |
| | Lehr'sches Dämpfungsmaß | $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \omega^2}}$ | $[-]$ |
| | logarithmisches Dekrement | $\vartheta = \delta T = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}}$ | $[-]$ |

3) Grenzfall $\delta = \omega_0$

schwach gedämpft, $\delta < \omega_0$ : $\quad x(t) = e^{-\delta t}\,(A\ \sin\omega t + B\ \cos\omega t)$

Grenzübergang $\delta \to \omega_0$

$x(t) = e^{-\delta t}\left(\overline{A}\,t + \overline{B}\right)$




4) starke Dämpfung $\delta > \omega_0$

$x(t) = C_1\,e^{\lambda_1 t} + C_2\,e^{\lambda_2 t}$ ,

$\lambda_1 , \lambda_2 \in \mathbb{R}^-$