13 Schwingungen

Schwingungen treten in allen Fachgebieten mit rückgekoppelten Prozessen auf. Im Maschinenbau entstehen Schwingungen durch elastische Radaufhängungen, Maschinenfundamente oder Maschinenteile, in der Elektrotechnik durch Schwingkreise, in der Technischen Kybernetik durch Regelkreise, im Bauwesen an Brücken und Türmen, in der Wirtschaft in Form von Konjunktur- oder Kursschwankungen, in der Biologie als Populationsschwankungen und Pulsschlag, in der Chemie und Verfahrenstechnik durch gekoppelte chemische Reaktionen.

Entsprechend vielfältig sind die Schwingungserscheinungen und Mechanismen der Schwingungserregung. Schwingungen können periodisch oder regellos sein, ihre Amplituden können abnehmen oder aufklingen. Wird ein Schwinger einmalig angestoßen und sich anschließend selbst überlassen, bezeichnet man die Bewegung als freie Schwingung. Entsteht die Schwingung dagegen durch dauernde Störung von außen, heißt sie erzwungene Schwingung. Störungen müssen nicht notwendig eine Schwingung erzwingen. Verändert man z.B. die Länge eines Fadenpendels, kann die Gleichgewichtslage erhalten bleiben. Sie ändert jedoch ihren Stabilitätscharakter und im Zusammenspiel mit einer Anfangsauslenkung können Schwingungen schnell aufklingen, man bezeichnet diese als parametererregte Schwingungen. Bei selbsterregten Schwingern wie dem Uhrenpendel ist die Störung über einen inneren Schaltmechanismus mit der Schwingung rückgekoppelt, so dass die Energiezufuhr stets im richtigen Augenblick erfolgt und die Schwingung anfacht bzw. aufrecht erhält.

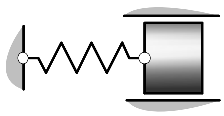
Mathematisch lassen sich Schwingungen in Form von Differentialgleichungen beschreiben, ihre Anzahl hängt vom Freiheitsgrad des Schwingungssystems ab. Die Differentialgleichungen können linear oder nichtlinear in den Schwingungskoordinaten sein. Lösungen für nichtlineare Differentialgleichungen sind nur in ausgewählten Fällen bekannt, z.B. für die Schwingung eines Pendels. In vielen Fällen interessiert man sich jedoch lediglich für kleine Schwingungen um eine vorgegebene Sollbahn oder Gleichgewichtslage. In diesem Fall kann die nichtlineare Schwingungsgleichung linearisiert werden, um bekannte Lösungsverfahren auf die entstehenden linearen Differentialgleichungen anzuwenden.

13.1 Charakterisierung von Schwingungen

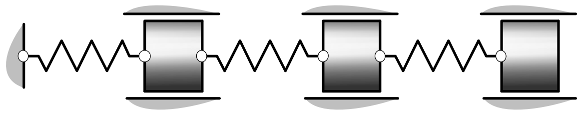
Schwingungen lassen sich hinsichtlich folgender Kriterien klassifizieren:

Freiheitsgrad

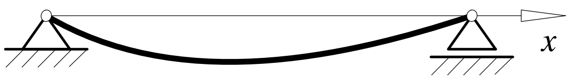
◇ Einfacher Schwinger ($f = 1$)



◇ Mehrfacher Schwinger ($f = n$)

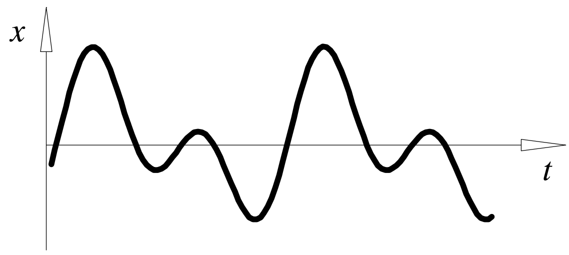


◇ Kontinuierlicher Schwinger ($f \to \infty$)

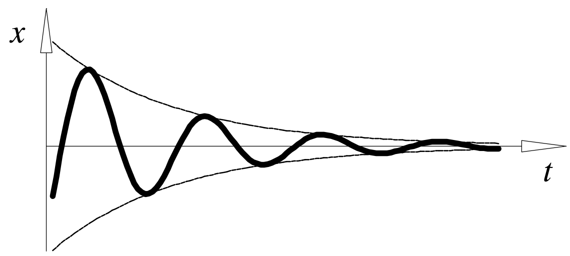


Zeitverlauf

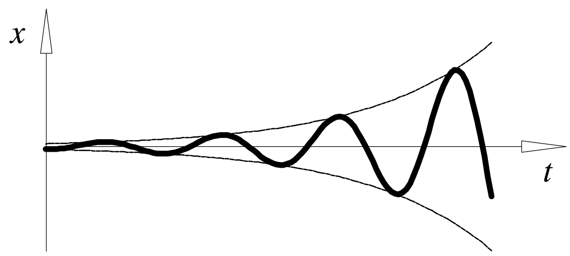
◇ periodische Schwingung



◇ abklingende (gedämpfte) Schwingung



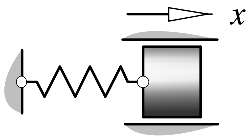
◇ aufklingende (angefachte) Schwingung



◇ regellose Schwingung (stochastisch/chaotisch)

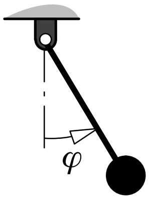
Schwingungsdifferentialgleichung

◇ lineare Schwingungen



$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\,x = 0$$

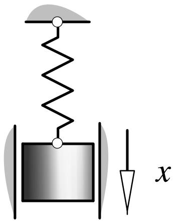
◇ nichtlineare Schwingungen



$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\,\sin\varphi = 0$$

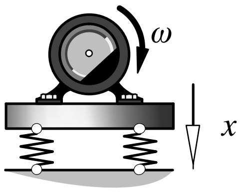
Art der Schwingungserregung

◇ freie Schwingungen
(Anregung durch Anfangsauslenkung oder Stoß)



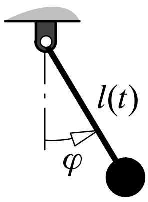
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\,x = 0$$

◇ erzwungene Schwingungen
(Zwangserregung durch Unwuchten, Fahrbahnunebenheiten, etc.)



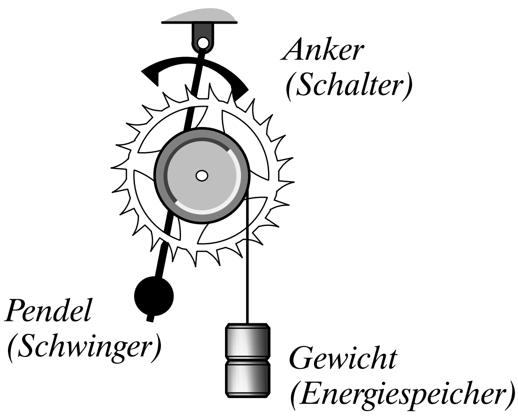
$$\ddot{x} + \frac{c}{m}\,x = f(t)$$

◇ parametererregte Schwingungen
(Gleichgewichtslage $\varphi = 0$ bleibt Lösung, erst Anfangsauslenkung führt zur Schwingung)



$$\ddot{\varphi} + \frac{2\,\dot{l}(t)}{l(t)}\,\dot{\varphi} + \frac{g}{l(t)}\,\sin\varphi = 0$$

◇ selbsterregte Schwingungen
(Energiezufuhr im Takt der Schwingung)

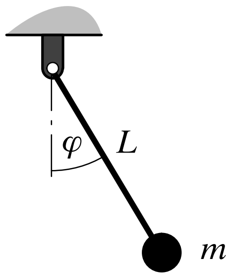


13.2 Nichtlineare Pendelschwingungen

Schwingungsgleichung

z.B. Mathematisches Pendel:

$$\ddot{\varphi} + \omega_o^2 \sin\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_o^2 = \frac{g}{L}$$

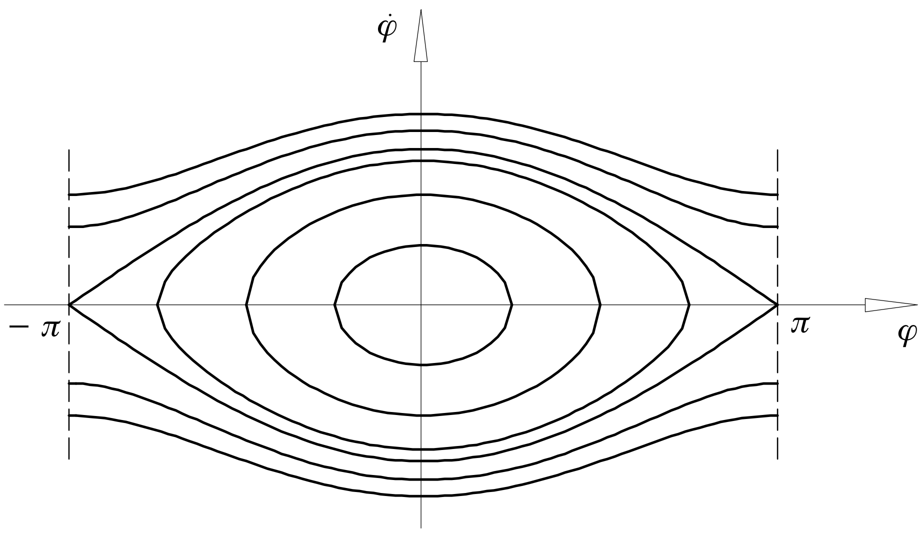


Phasenporträt

Phasenkurven $(\varphi, \dot{\varphi})$: $\quad \ddot{\varphi} + \omega_o^2 \sin\varphi = 0$

Integration

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{2} - \omega_o^2 \cos\varphi = const = \frac{\dot{\varphi}_0^2}{2} - \omega_o^2 \cos\varphi_0$$



spez. Anfangsbedingung: $\varphi_0 = \varphi_A\,,\ \dot{\varphi}_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\varphi} = \pm\,\omega_0\sqrt{2\left(\cos\varphi - \cos\varphi_A\right)}$

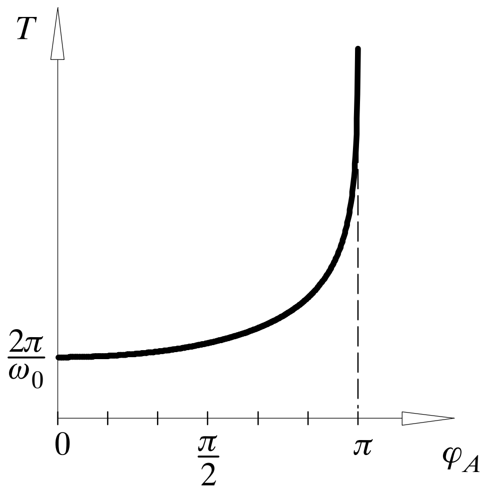
Schwingungszeit (Periode)

Integration: $$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_A)}$$

$$dt = \frac{1}{\omega_0 \sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_A)}}\, d\varphi$$

$$T = \frac{4}{\omega_0} \int_0^{\varphi_A} \frac{1}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\varphi_A)}}\, d\varphi$$

→ führt auf vollständiges elliptisches Integral



13.3 Gleichgewichtslagen und Linearisierung

Nichtlineare Schwingungsgleichung

Die Schwingung mechanischer Systeme wird i.Allg. durch Differentialgleichungen 2. Ordnung beschrieben, in denen die Beschleunigungen linear auftreten:

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = 0$$

Gleichgewichtslagen

Ansatz: $x(t) = x_0 = const$

eingesetzt: $f(x_0\,,\,0) \overset{!}{=} 0$

Linearisierung der Schwingungsgleichung um eine Gleichgewichtslage

Ansatz: $x(t) = x_0 + \bar{x}(t)$ mit $|\bar{x}(t)| \ll 1$

$\rightarrow\ \dot{x}(t) = \dot{\bar{x}}(t) \ll 1$

$\ddot{x}(t) = \ddot{\bar{x}}(t) \ll 1$

eingesetzt: $\ddot{\bar{x}} + f(x_0 + \bar{x},\, \dot{\bar{x}}) = 0$

Taylorreihenentwicklung

◇ $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{1}{2} f''(x_0)\,h^2 + \ldots$

◇ $f(x_{10} + h_1\,,\, x_{20} + h_2\,, \ldots) = f(x_{10}\,, x_{20}\,, \ldots)$

$$+ \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{x_{10}, x_{20}} h_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_{x_{10}, x_{20}} h_2 + \ \ldots$$

linearisierte Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\bar{x}} + \left.\frac{\partial f}{\partial \dot{x}}\right|_{x_0\,, 0} \dot{\bar{x}} + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0\,, 0} \bar{x} = 0$$