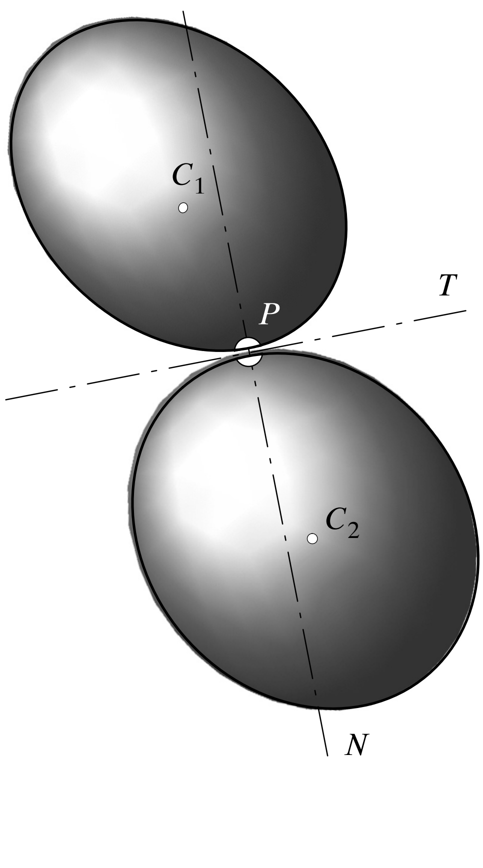
12 Stoßprobleme

Stöße sind kurzzeitige Körperkontakte mit großen Kontaktkräften, die zu sprungförmiger Änderung des Geschwindigkeitszustands führen. Theoretisch könnte man ein solches Stoßproblem mit den bereits bekannten Methoden der Mehrkörperdynamik lösen, müßte dazu aber ein Kraftgesetz am Berührpunkt definieren. Da Stöße jedoch in sehr kurzer Zeit ablaufen und die dabei auftretenden Verformungen sehr klein sind, läßt sich das Vorgehen durch Grenzübergang wesentlich vereinfachen.

Dabei vernachlässigt man die Verformungen und betrachtet die stoßenden Körper als starr. Weiterhin betrachtet man die Stoßzeit als vernachlässigbar kurz, d.h. $\Delta t \rightarrow 0$. Da die Körper sich nur mit endlicher Geschwindigkeit bewegen, kann die Lageänderung während des Stoßes vernachlässigt werden. Auch endlich große Kräfte wie Gewichtskräfte, Feder- oder Dämpferkräfte erzeugen damit nur einen vernachlässigbar kleinen Kraftstoß. Die Stoßkräfte im Kontaktpunkt und in Bindungen werden dagegen unendlich groß, so dass sie einen endlich großen Kraftstoß erzeugen, der Einfluß auf die Impuls- und Drallbilanzen der beteiligten Körper hat.

Das rechnerische Vorgehen entspricht dem bei Mehrkörpersystemen: Zunächst schneidet man die stoßenden Körper frei und ersetzt Kontakte und Bindungen durch äquivalente Kraft- und Momentenstöße. Anschließend formuliert man Impuls- und Drallbilanzen, welche die sonst üblichen Impuls- und Drallsätze ersetzen. Zusätzlich muss man an den Kontaktstellen ein Stoßgesetz für die Differenzgeschwindigkeiten der Kontaktpunkte in Normalenrichtung vor und nach dem Stoß formulieren. Dies führt auf ein System von linearen Gleichungen, das mit den Hilfsmitteln der linearen Algebra zu lösen ist.

Bezeichnungen:

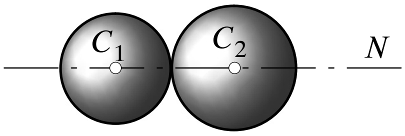


Index	*Bezeichnung*
$-, +$	*Zeitpunkt unmittelbar vor (t^-) bzw. nach (t^+) dem Stoß*
1, 2, ...	*stoßender Körper*
T, N	*Tangential- und Normalen-Richtung*
P	*Kontaktpunkt*

12.1 Stoßarten

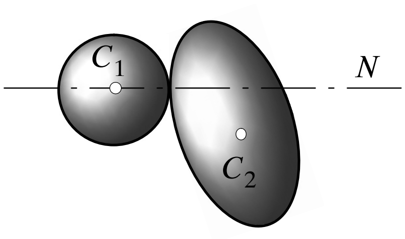
Stöße lassen sich hinsichtlich ihrer Kinematik und Werkstoffpaarung klassifizieren:

◇ **zentrischer** Stoß

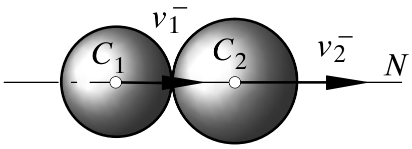


Schwerpunkte liegen auf Stoßnormale

exzentrischer Stoß

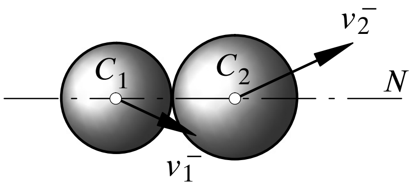


◇ **gerader** Stoß

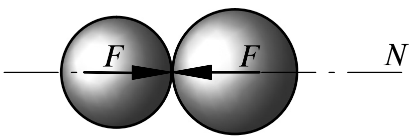


Schwerpunktsgeschwindigkeiten in Richtung Stoßnormale

schiefer Stoß

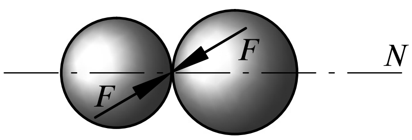


◇ **glatter** Stoß



Kontaktkräfte in Normalenrichtung

rauer Stoß



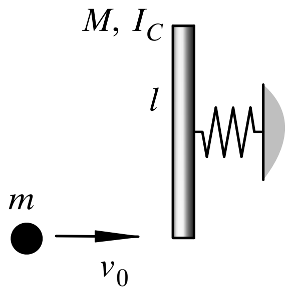
tangentiales Haften

◇ **elastischer** Stoß: Erhaltung der kinetischen Energie $T^+ = T^-$

plastischer Stoß: Körper bleiben im Berührpunkt haften $\vec{v}_{PN2}^{\,+} = \vec{v}_{PN1}^{\,+}$

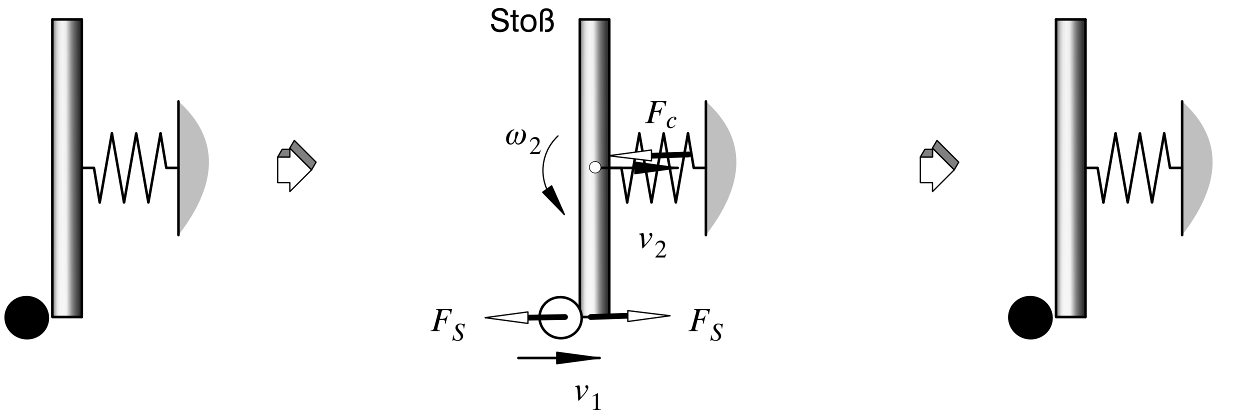
12.2 Grundgleichungen

Einführendes Beispiel: Exzentrischer Stoß einer Kugel auf einen Stab



t^- : unmittelbar **vor** dem Stoß

$t^+ = t^- + \Delta t$: unmittelbar **nach** dem Stoß



Impulssatz:
$$m\,\dot v_1 = -F_S$$
$$M\,\dot v_2 = F_S - F_c$$

Drallsatz:
$$I_C\,\dot\omega_2 = \frac{l}{2}\,F_S$$

Integration über Stoßintervall

Impulsbilanzen:
$$m\,v_1^+ = m\,v_1^- - \Delta p$$
$$M\,v_2^+ = M\,v_2^- + \Delta p$$

Drallbilanz:
$$I_C\,\omega_2^+ = I_C\,\omega_2^- + \frac{l}{2}\,\Delta p \quad \text{mit} \quad \Delta p = \int_{t^-}^{t^+} F_S\,dt$$

Werkstoffpaarung am Berührpunkt P:

- elastischer Stoß → Energiebilanz $T^+ = T^-$

$$\frac{1}{2}\, m\, v_1^{+\,2} + \frac{1}{2}\, M\, v_2^{+\,2} + \frac{1}{2}\, I_C\, \omega_2^{+\,2} = \frac{1}{2}\, m\, v_1^{-\,2} + \frac{1}{2}\, M\, v_2^{-\,2} + \frac{1}{2}\, I_C\, \omega_2^{-\,2}$$

$$\rightarrow \quad m\left(v_1^{+2} - v_1^{-2}\right) + M\left(v_2^{+2} - v_2^{-2}\right) + I_C\left(\omega_2^{+\,2} - \omega_2^{-\,2}\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad m\left(v_1^+ - v_1^-\right)\left(v_1^+ + v_1^-\right) + M\left(v_2^+ - v_2^-\right)\left(v_2^+ + v_2^-\right) + I_C\left(\omega_2^+ - \omega_2^-\right)\left(\omega_2^+ + \omega_2^-\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad -\left(v_1^+ + v_1^-\right) + \left(v_2^+ + v_2^-\right) + \frac{l}{2}\left(\omega_2^+ + \omega_2^-\right) = 0$$

$$\rightarrow \quad \left(v_2^+ + \frac{l}{2}\,\omega_2^+\right) - v_1^+ = -\left[\left(v_2^- + \frac{l}{2}\,\omega_2^-\right) - v_1^-\right]$$

$$\rightarrow \quad v_{P2}^+ - v_{P1}^+ = -\left[v_{P2}^- - v_{P1}^-\right] \qquad \text{oder} \qquad \Delta v_P^+ = -\Delta v_P^-$$

- plastischer Stoß

  → Haften am Kontaktpunkt nach dem Stoß: $\Delta v_P^+ = 0$

- allgemeiner Stoß → voneinander Lösen mit partiellem Energieverlust

  $\Delta v_P^+ = -\,\varepsilon\, \Delta v_P^-$ mit $0 \le \varepsilon \le 1$:

$\varepsilon = 1$	elastisch
$\varepsilon = 0$	plastisch
$0 < \varepsilon < 1$	teilelastisch, teilplastisch

<u>Allgemeines Vorgehen zur Lösung von Stoßaufgaben</u>

1) Zeichnen des Systems in der Stoßkonfiguration und Festlegen aller Geschwindigkeiten v_i^-, ω_i^- unmittelbar vor dem Stoß

2) **Freischneiden** aller Körper, Ersetzen der Kontaktstellen und Bindungen durch unbekannte **Kraftstöße** $\Delta p_k = \int F_k\, dt$ und **Momentenstöße** $\Delta L_k = \int M_k\, dt$ (Beachte **actio** $\stackrel{!}{=}$ **reactio,** Nicht−Stoßkräfte werden vernachlässigt)

3) Formulierung der **Grundgleichungen** für alle Körper und Stoßpaarungen:

   Impulsbilanz: $\boldsymbol{p}_i^+ = \boldsymbol{p}_i^- + \sum \Delta \boldsymbol{p}_k$ mit $\boldsymbol{p} = m\, \boldsymbol{v}_C$

   Drallbilanz: $\boldsymbol{L}_i^+ = \boldsymbol{L}_i^- + \sum\left(\boldsymbol{r}_k' \times \Delta\boldsymbol{p}_k + \Delta\boldsymbol{L}_k\right)$ mit $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}_C\, \boldsymbol{\omega}$, C: *Schwerpunkt*
   oder $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{I}_O\, \boldsymbol{\omega}$, O: *Fixpunkt*

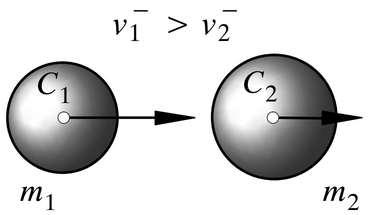
   Werkstoff: $\Delta v_P^+ = -\,\varepsilon\, \Delta v_P^-$ mit $0 \le \varepsilon \le 1$

   Stoßzahl $\varepsilon = \varepsilon(\textit{Werkstoffe, Kontaktgeometrie, Stoßgeschwindigkeiten})$

4) Elimination der Kraft- und Momentenstöße, Berechnung der Geschwindigkeiten nach dem Stoß

12.3 Stoßbeispiele

Gerader, zentrischer Stoß zweier Kugeln



$$\rightarrow \quad v_1^+ = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1 v_1^- + m_2 v_2^- + m_2 \varepsilon (v_2^- - v_1^-)\right]$$

$$v_2^+ = \frac{1}{m_1 + m_2}\left[m_1 v_1^- + m_2 v_2^- - m_1 \varepsilon (v_2^- - v_1^-)\right]$$

speziell:

- plastischer Stoß: $\varepsilon = 0$

  $\rightarrow v_1^+ = v_2^+ = \dfrac{m_1 v_1^- + m_2 v_2^-}{m_1 + m_2}$ Haften nach dem Stoß

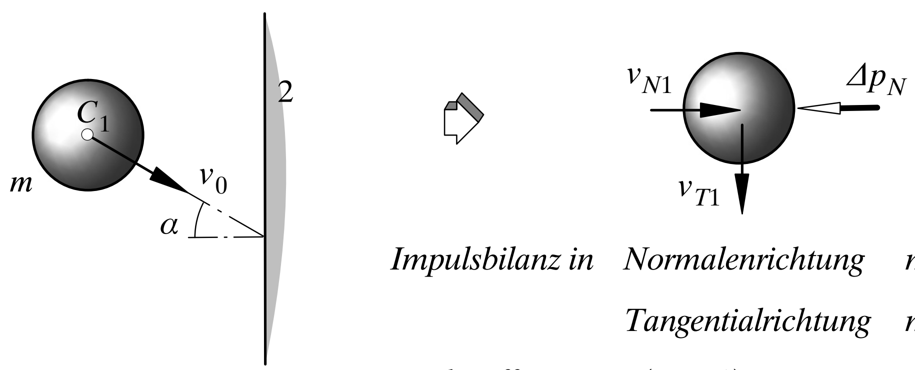
- gleich große elastische Kugeln: $\varepsilon = 1,\ m_1 = m_2$

  $\rightarrow v_1^+ = v_2^-\ ,\ \ v_2^+ = v_1^-$ Geschwindigkeitsaustausch

- elastische Kugel gegen stehende Wand: $\varepsilon = 1,\ m_2 \rightarrow \infty,\ v_2^- = 0$

  $\rightarrow v_1^+ = \lim\limits_{m_2 \rightarrow \infty} \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1^- = -v_1^-$ Rückprall

Elastischer, glatter, schiefer, zentrischer Stoß einer Kugel gegen eine Wand

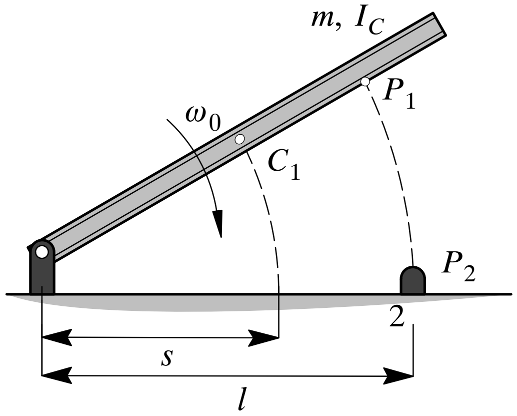


Impulsbilanz in	*Normalenrichtung*	$m\, v_{N1}^+ = m\, v_{N1}^- - \Delta p_N$
	Tangentialrichtung	$m\, v_{T1}^+ = m\, v_{T1}^-$
Werkstoffpaarung $(\varepsilon = 1)$		$v_{N1}^+ = -v_{N1}^-$

$$\rightarrow \quad v_{T1}^+ = v_{T1}^- = v_0 \sin\alpha$$

$$v_{N1}^+ = -v_{N1}^- = -v_0 \cos\alpha$$

Stoß eines gelagerten Stabes



→ Rückprall: $\omega_1^+ = -\,\varepsilon\,\omega_0$

Lagerstoß: $\Delta p_L = \dfrac{I_C + m\,s^2 - m\,s\,l}{l}\,(1+\varepsilon)\,\omega_0$

speziell: stoßfreies Lager, $\Delta p_L \overset{!}{=} 0$

$$\rightarrow l = \frac{I_C + m\,s^2}{m\,s} \equiv L_{red}$$