11 Energiemethoden

Energiemethoden beinhalten keine neuen Prinzipe, sondern sind vereinfachende Gesamtbetrachtungen an abgeschlossenen Systemen, die aus den bereits bekannten Axiomen folgen. Durch Projektion aller Kräfte auf die Bewegungsrichtung bilanzieren sie die verschiedenen Energie- und Arbeitsbeiträge für zwei verschiedene Systemzustände, aus denen man für bestimmte Systeme ohne Integration direkte Zusammenhänge zwischen Lage und Geschwindigkeit ablesen kann. Allerdings liefern Energiemethoden nur skalare Gleichungen und damit nur Aussagen über Beträge oder einzelne Größen.

Die Trägheitseigenschaften eines Systems spiegeln sich in ihrer kinetischen Energie wider. Für den Massenpunkt und den Starrkörper ergeben sich einfache Beziehungen in Abhängigkeit seiner Masse, seines Trägheitstensors und seines Geschwindigkeitszustands. Die Gesamtenergie eines Systems erhält man durch Aufsummieren der Einzelenergien.

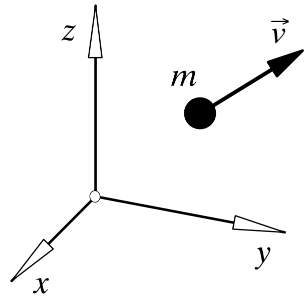
Kräfte und Momente in Bewegungsrichtung leisten Arbeit am System und verändern damit die Energiebilanz. Die geleistete Arbeit lässt sich in Energiespeichern wie Federn in Form von potentieller Energie aufnehmen, speichern und wieder verlustfrei freisetzen. Eingeprägte Kräfte mit einer solchen Eigenschaft bezeichnet man als Potentialkräfte. Reaktionskräfte leisten bezogen auf das Gesamtsystem keine Arbeit, da sie senkrecht auf den Bewegungen stehen. Sie werden bei der Energiebetrachtung automatisch eliminiert und vereinfachen damit die Berechnungsaufgabe.

Durch Differentiation der Arbeit bezüglich der Zeit erhält man die Leistung einer Kraft oder eines Moments. Das Verhältnis von Nutzleistung zu eingebrachter Leistung bezeichnet man als Wirkungsgrad eines Systems, der bei mechanischen Systemen nicht größer als eins sein kann. Bei hintereinander geschalteten Teilsystemen ergibt sich der Gesamtwirkungsgrad als Produkt der Einzelwirkungsgrade.

Betrachtet man ein System an zwei verschiedenen Zeitpunkten, dann entspricht die Änderung der kinetischen Energie der von den Kräften geleisteten Arbeit. Im Unterschied zu den Impulsbetrachtungen am Gesamtsystem heben sich innere Kräfte bei Energiebetrachtungen nicht heraus, sondern sind in der Energiebilanz zu berücksichtigen. Treten nur Potentialkräfte auf, bleibt die Gesamtenergie konstant, man bezeichnet das System dann als konservativ.

11.1 Kinetische Energie

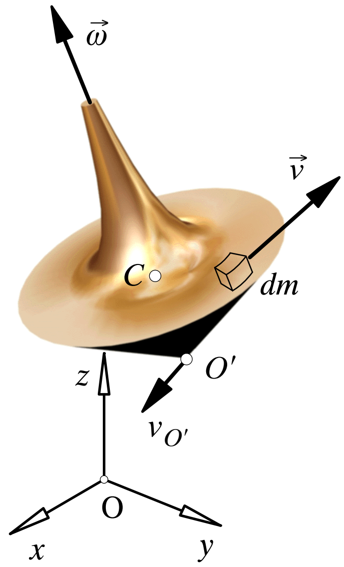
Massenpunkt



Definition: $T = \frac{1}{2}\, m\, v^2 = \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v} = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{p}$

Einheit: $1\,[\mathrm{Nm}] \;=\; 1\,[\mathrm{J}]$

Starrkörper



Massenelement: $dT = \frac{1}{2}\, dm\, v^2 = \frac{1}{2}\, dm\, \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}$

Starrkörperkinematik $\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{v}_{O'} \;+\; \tilde{\boldsymbol{\omega}}\, \boldsymbol{r}'$

Körper: $T = \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}_{O'}^T\, \boldsymbol{v}_{O'} - m\, \boldsymbol{v}_{O'}^T\, \tilde{\boldsymbol{r}}'_C\, \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}_{O'}\, \boldsymbol{\omega}$

Sonderfälle:
- ♦ $O' \;\equiv\; C$ Schwerpunkt $\Rightarrow T = \frac{1}{2}\, m\, \boldsymbol{v}_C^T \boldsymbol{v}_C + \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}_C\, \boldsymbol{\omega}$
- ♦ $O' \;\equiv\; C$ und ebene Bewegung $\Rightarrow T = \frac{1}{2}\, m\left(v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2\right) + \frac{1}{2}\, I_{Cz}\, \omega^2$
- ♦ O' Fixpunkt oder Momentanpol $\Rightarrow T = \frac{1}{2}\, \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{I}_{O'}\, \boldsymbol{\omega}$

Mehrkörpersystem

$$T = \frac{1}{2} \int\limits_{\bigcup K_i} v^2\, dm = \sum_i \frac{1}{2} \int\limits_{K_i} v^2\, dm = \sum_i T_i$$

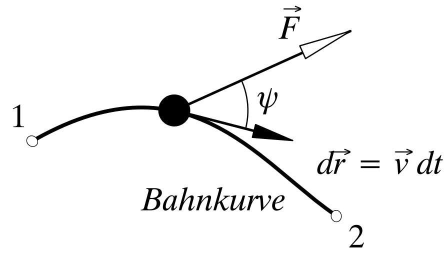
kinetische Energie des einzelnen Massenpunkts oder Körpers

11.2 Arbeit, Leistung und potentielle Energie

Arbeit

◇ Kraft

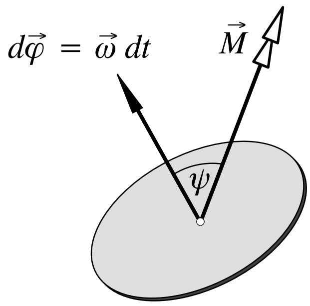
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{r} = d\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{F} = F\ \cos\psi\ dr$$



Integration über Bahnkurve

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{r} \qquad \text{Einheit: } 1\,[\mathrm{Nm}] = 1\,[\mathrm{J}]$$

◇ Moment



$$dW = \vec{M}\cdot d\vec{\varphi} = \boldsymbol{M}^T d\boldsymbol{\varphi} = d\boldsymbol{\varphi}^T \boldsymbol{M} = M\ \cos\psi\ d\varphi$$

Integration über Drehbewegung

$$W_{12} = \int_1^2 \boldsymbol{M}^T d\boldsymbol{\varphi} \qquad \text{Einheit: } 1\,[\mathrm{Nm}] = 1\,[\mathrm{J}]$$

◇ Kräftesystem: Aufsummieren der Einzelarbeiten

$$W_{12} = \sum_i \int_1^2 \boldsymbol{F}_i^T d\boldsymbol{r}_i + \sum_j \int_1^2 \boldsymbol{M}_j^T d\boldsymbol{\varphi}_j$$

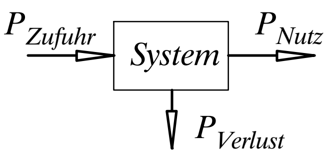
Leistung

◇ allgemeine Definition

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad \text{Einheit: } 1\,[\mathrm{Nm/s}] = 1\,[\mathrm{J/s}] = 1\,[\mathrm{W}]$$

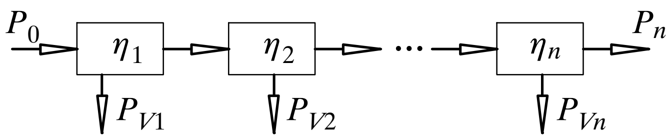
- Kraft: $dW = \boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{v}\,dt \quad \Rightarrow \quad P = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{v}$
- Moment $dW = \boldsymbol{M}^T d\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{M}^T \boldsymbol{\omega}\,dt \quad \Rightarrow \quad P = \boldsymbol{M}^T \boldsymbol{\omega}$

◇ Wirkungsgrad



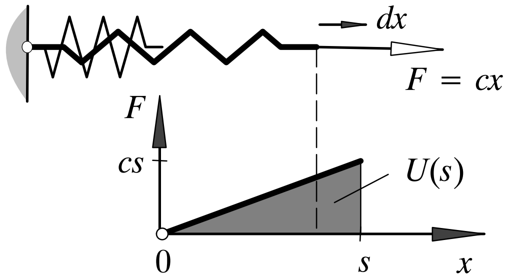
$$\eta = \frac{P_{Nutz}}{P_{Zufuhr}} \qquad \text{Einheit: } [-]$$

Systemkette: $\eta = \eta_1\,\eta_2 \ldots \eta_n$



Potentielle Energie

◇ lineare Feder



Arbeit zum Spannen der Feder:

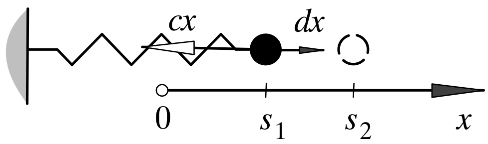
$$W(s) = \int_0^s F(x)\,dx = \int_0^s cx\,dx = \frac{cs^2}{2}$$

⇩

in Feder gespeicherte Energie: $U(s) = \dfrac{cs^2}{2}$

⇩

potentielle Energie = Potential, Arbeit zu leisten:

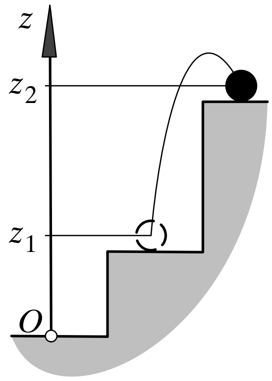


$$W_{12} = \int_{s_1}^{s_2} (-\,cx)\,dx = -\left(\frac{cs_2^2}{2} - \frac{cs_1^2}{2}\right)$$

⇩ Vergleich

$$W_{12} = -\,\Delta U = -\left[U(s_2) - U(s_1)\right]$$

◇ konstante Gewichtskraft



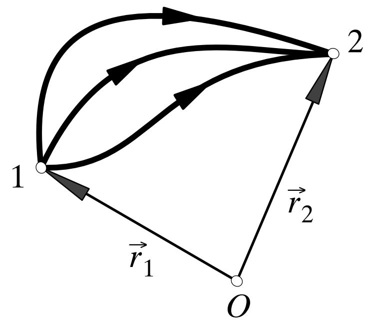
$$W_{12} = \int_1^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -mg \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = -\,mg \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$= -\left[mg\,z_2 - mg\,z_1\right]$$

$$\Rightarrow \quad U(z) = mg\,z$$

◇ allgemeine Definition

Eine Kraft $\boldsymbol{F}$ ist eine Potentialkraft, wenn die geleistete Arbeit nicht vom Weg, sondern nur von den Endpunkten abhängt. Es existiert dann eine Potentialfunktion $U(\boldsymbol{r})$, so dass gilt:



$$W_{12} = -\,\Delta U = -\left[U(\boldsymbol{r}_2) - U(\boldsymbol{r}_1)\right].$$

Bestimmung von $U(\boldsymbol{r}) = U(x,y,z)$:

$$dU = -\,dW = -\,\boldsymbol{F}^T d\boldsymbol{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = -\,F_x\,dx - F_y\,dy - F_z\,dz$$

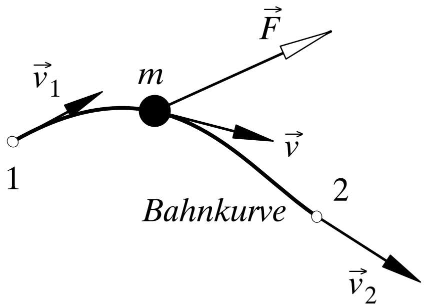
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x} = -\,F_x\,, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\,F_y\,, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\,F_z}$$

$$grad\ U = \begin{bmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{bmatrix} = -\,\boldsymbol{F}$$

11.3 Energiebilanz

Durch Integration der Grundgleichungen über die Bewegung kann ein skalarer Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Ort jeweils zu Beginn und am Ende der Bewegung gefunden werden.

<u>Massenpunkt</u>



Impulssatz: $m\,\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$

Skalarprodukt mit $\vec{v}$
(Elimination der Lagerreaktionen)

Leistungsbilanz: die zeitliche Änderung der kinetischen Energie entspricht der Leistung der resultierenden Kraft

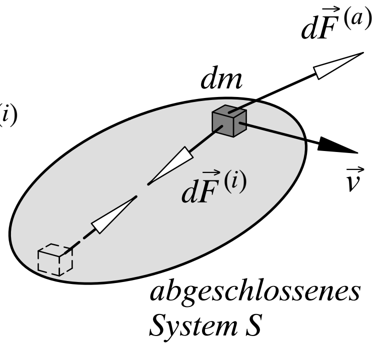
$$\frac{dT}{dt} = P$$

Integration über Bahnkurve $1 \rightarrow 2$

Energiebilanz: die Änderung der kinetischen Energie entspricht der Arbeit der resultierenden Kraft

$$T_2 - T_1 = W_{12}$$

Abgeschlossene Massenpunktsysteme



Impulssatz für ein Massenelement dm: $dm\,\dot{\boldsymbol{v}} = d\boldsymbol{F}^{(a)} + d\boldsymbol{F}^{(i)}$

Skalarprodukt mit $\vec{v}$ und Integration über System
(Elimination der Bindungsreaktionen)

Leistungsbilanz: $\dfrac{dT}{dt} = P^{(a)} + P^{(i)}$

Integration über Bahnkurve $1 \rightarrow 2$

Energiebilanz: $T_2 - T_1 = W_{12}^{(a)} + W_{12}^{(i)} \equiv W_{12}$

Abgeschlossene Mehrkörpersysteme

Obige Bilanzgleichungen gelten analog unter Berücksichtigung der Leistung bzw. Arbeit der eingeprägten Momente

Energieerhaltung eines konservativen Systems

konservatives System: alle inneren und äußeren Kräfte sind Potentialkräfte

$\rightarrow\ W_{12} = W_{12}^{(a)} + W_{12}^{(i)} = -\left(U_2 - U_1\right)$

Energiebilanz:

$\rightarrow\ T_2 - T_1 = -\left(U_2 - U_1\right) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{T_2 + U_2}_{E_2} = \underbrace{T_1 + U_1}_{E_1}$

Gesamtenergie des Systems bleibt konstant