9 Mehrkörpersysteme

Bei vielen technischen Fragestellungen kann man die Verformungen der Maschinenteile gegenüber den durch Lager ermöglichten Bewegungen vernachlässigen. Die daraus resultierenden Modelle bezeichnet man als Mehrkörpersysteme. Sie bestehen aus **massebehafteten, starren Körpern**, die bewegte Maschinenteile wie Räder, Rotoren, Gewichte oder schwere Umlenkrollen repräsentieren, **masselosen, reibungsfreien Bindungen** als Idealisierung von Lagern, Stützen, Seilen, leichten Umlenkrollen, Getrieben und Haftreibungskontakten, sowie **masselosen Kraftelementen** als Repräsentanten für Federn, Dämpfer, Gleitreibungskontakten und Antriebsmotoren. Führt ein Körper keine Drehbewegung aus oder ist sein Trägheitsmoment vernachlässigbar, kann statt des starren Körpers auch der **Massenpunkt** als einfacheres Modellelement herangezogen werden.

Bindungen beschränken die Bewegungsmöglichkeiten des Systems und rufen Reaktionskräfte und -momente hervor, die zunächst ebenso unbekannt wie die verbleibenden Bewegungsgrößen sind. Die durch Bindungen beschränkten Bewegungsgrößen lassen sich mit Hilfe von kinematischen Beziehungen eliminieren, die aus den Bindungen folgen und am einfachsten für Geschwindigkeitsgrößen zu formulieren sind. Beziehungen zwischen Lagegrößen bzw. Beschleunigungsgrößen ergeben sich daraus durch Integration bzw. Differentiation.

Durch Freischneiden können die einzelnen Körper oder Teilsysteme freigestellt werden, so dass der bereits bekannte Impuls- und Drallsatz, der ursprünglich nur für freie Körper gilt, anwendbar wird. Dies liefert bei räumlicher Betrachtung für jeden Körper 6 Gleichungen, bei ebener Betrachtung 3 Gleichungen, die die unbekannten Bewegungsgrößen und Reaktionen enthalten.

Eliminiert man die Reaktionen, erhält man Bewegungsgleichungen in Form von Differentialgleichungen für die freien Bewegungsgrößen. Durch Einsetzen der sich daraus ergebenden Bewegungsfunktionen in die Grundgleichungen findet man schließlich die Lagerreaktionen. Falls bei der Modellbildung Annahmen über Kraft- oder Bewegungsrichtungen gemacht werden mussten, sollten diese zum Abschluss überprüft werden.

Anwendungsbeispiele

Robotik/Manipulatoren

Fahrzeugdynamik

9.1 Bindungen

Lagerungen und Bindungen → reduzieren Bewegungsfreiheiten
→ rufen Reaktionskräfte und -momente hervor

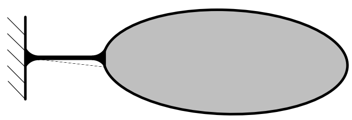
Wertigkeit n_j^c = Zahl der Bewegungseinschränkungen
= Zahl der Reaktionen

2D: $n_j^c = 3 -$ *Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade*
3D: $n_j^c = 6 -$ *Zahl der verbleibenden Freiheitsgrade*

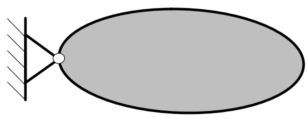
<u>Typische Bindungselemente</u> (ebene Betrachtung)

◇ **Lager und Führungen**

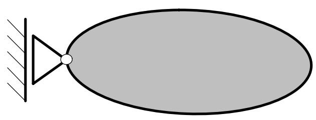
feste Einspannung



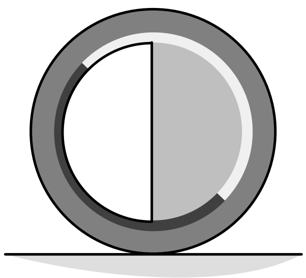
Gelenklager



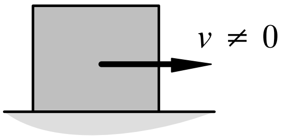
Loslager



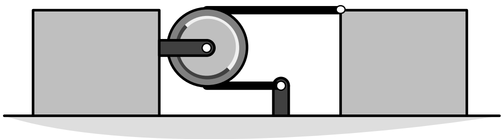
◇ **Abrollen (Haftreibung)**



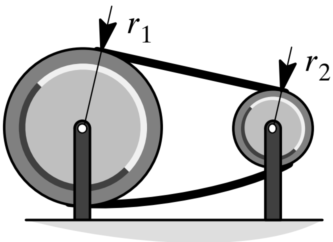
◇ **Gleitkontakt (Gleitreibung)**



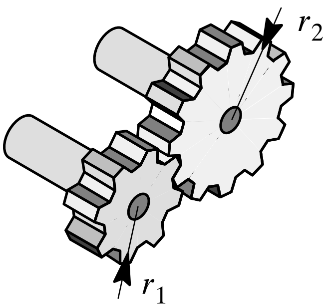
◇ **Seile und Rollen**



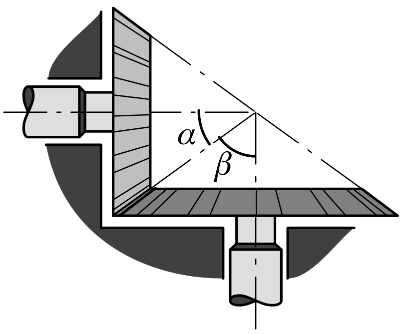
◇ **Riemenantrieb**



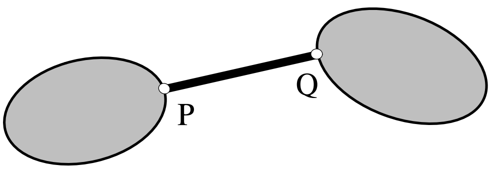
◇ **Stirnradgetriebe**



◇ **Kegelradgetriebe**



◇ **Stab**

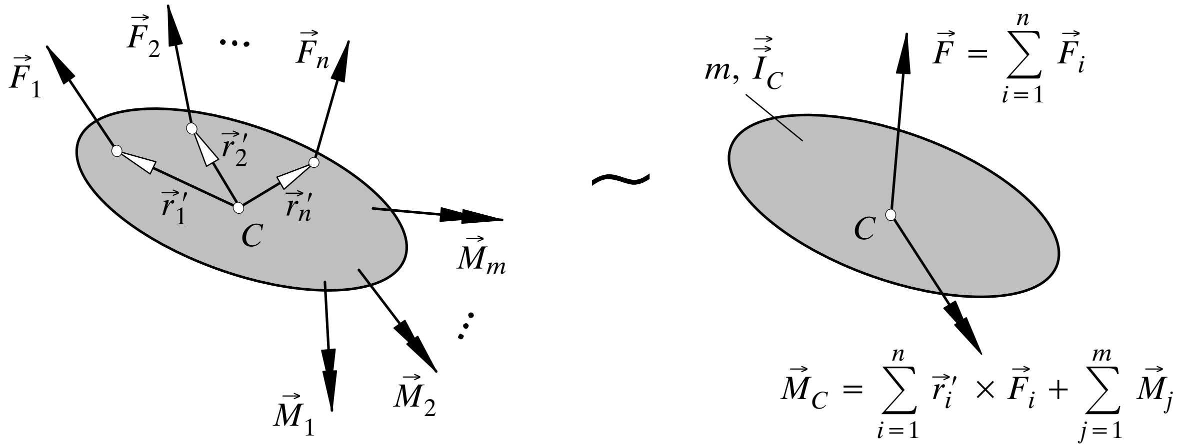


9.2 Impuls- und Drallsatz

Die Bewegung eines **freien** bzw. **freigeschnittenen** Körpers wird eindeutig durch Impuls- und Drallsatz beschrieben. Die einfachste Form dieser Grundgleichungen ergibt sich für den **Schwerpunkt** C als Bezugspunkt.

Räumliche Bewegung

Resultierender Kraftwinder bez. Schwerpunkt C:



Impulssatz: $m\,\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{F}$

absolute Beschleunigung des Schwerpunkts C

Masse des Körpers

Drallsatz $\boldsymbol{I}_C\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{I}_C\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_C$

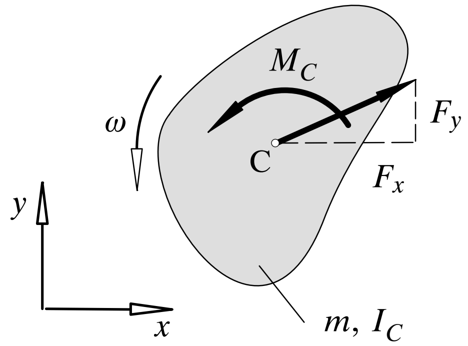
absolute Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Trägheitstensor des Körpers bez. Schwerpunkt C

absolute Winkelbeschleunigung

Ebene Bewegung

Ann.: Bewegung in der x,y-Ebene, Drehung um die z-Achse.



Impulssatz:	$m\,a_{Cx} = F_x$
	$m\,a_{Cy} = F_y$
Drallsatz:	$I_C\,\dot{\omega} = M_C$

9.3 Bewegungsgleichungen

Klassifizierung von Bindungssystemen in Mehrkörpersystemen

- $f^u = \sum f_i^u$ Freiheitsgrad des freigeschnittenen Systems
  = Zahl der Grundgleichungen

  2D−Körper: $f_i^u = 3$ (Massenpunkte: $f_i^u = 2$)
  3D−Körper: $f_i^u = 6$ (Massenpunkte: $f_i^u = 3$)

- $n = \sum n_j^c$ Zahl der Bindungen (Ann.: unabhängige Bindungen)
  = Zahl der unbekannten Reaktionen

➧ $f = f^u - n$ verbleibender Freiheitsgrad des gebundenen Systems
= Zahl der unbekannten Bewegungsgrößen

Allgemeines Vorgehen zur Lösung dynamischer Probleme

1) Zeichnen des Systems in einer **allgemeinen** Position. Formulieren von **Bindungsbeziehungen** in Abhängigkeit der f freien Bewegungsgrößen

2) **Freischneiden** des Systems: Freistellen aller Körper, Ersetzen der Bindungen durch unbekannte Reaktionen sowie der Kopplungen durch bekannte eingeprägte Kräfte und Momente (Beachte **actio** $\overset{!}{=}$ **reactio**)

3) Formulierung der **Grundgleichungen** für alle Körper K_k, $k = 1(1)p$:

Impulssatz: $m\,\boldsymbol{a}_{Ck} = \boldsymbol{F}_k$

Drallsatz: $\boldsymbol{I}_{Ck}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_k \boldsymbol{I}_{Ck}\,\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{M}_{Ck}$, $\quad k = 1(1)p$

unabhängige Bewegungsgrößen — *Reaktionskräfte/-momente*

abhängige Bewegungsgrößen — *eingeprägte Kräfte/Momente*

Zahl der Gleichungen $\overset{!}{=}$ **Zahl der Unbekannten**

4) Einsetzen der **Bindungsbeziehungen** in die Grundgleichungen.

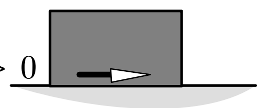
5) Elimination der Reaktionskräfte/-momente aus den Grundgleichungen liefert Gleichungen für die unbekannten Beschleunigungen (**Bewegungsgleichungen**)

   $\hat{=}$ Differentialgleichungen 2. Ordnung für die unabhängigen Bewegungsgrößen

6) **Integration** der Beschleunigungen

   ggf. zu überprüfende Annahmen: *Gleitbedingungen*

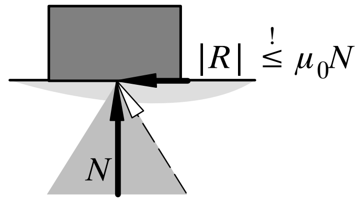
   $v_{rel} \overset{!}{>} 0$



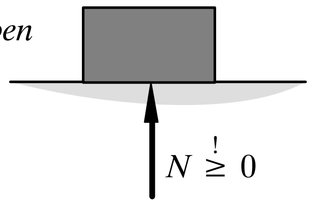
7) Ermitteln der **Reaktionskräfte und -momente** durch Einsetzen der Bewegungsfunktionen in die Grundgleichungen

<u>ggf. zu überprüfende Annahmen</u>:

- *Haftgrenze*



- *kein Abheben*



- *kein Kippen*