8 Kinetik der allgemeinen Starrkörperbewegung

Die allgemeine Starrkörperbewegung ist eine Überlagerung von Translation und Rotation mit je 3 Freiheitsgraden. Dem entsprechen 6 Gleichungen, die aus Impuls- und Drallsatz resultieren.

Der Impuls eines starren Körpers läßt sich auf ein Produkt aus Masse und Schwerpunktsgeschwindigkeit zurückführen. Hinsichtlich der Translation verhält sich ein Körper damit wie ein Massenpunkt, der durch Konzentration der gesamten Körpermasse im Schwerpunkt entsteht. Die einfachste Form des Impulssatzes ergibt sich mit dem Schwerpunkt als Bezugspunkt und entspricht der Formulierung beim Massenpunkt.

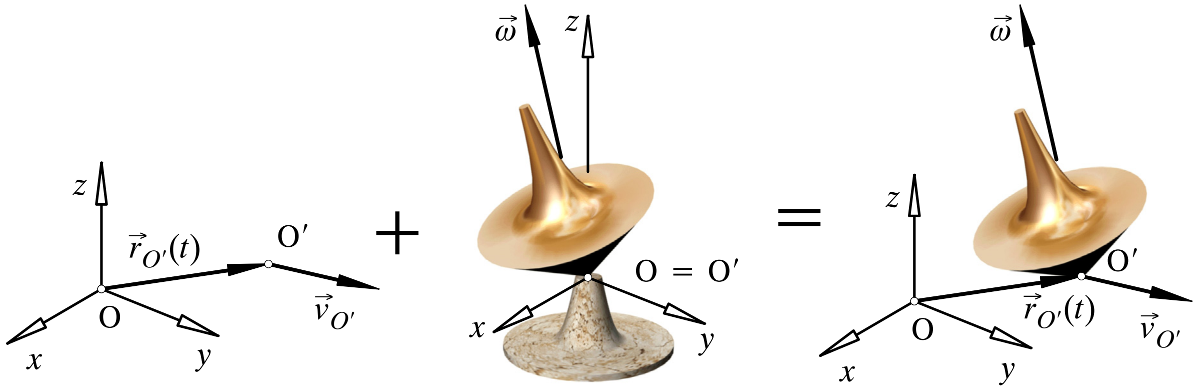
Der Drall eines Körpers ist als Impulsmoment bezüglich eines raumfesten Punktes definiert. Führt man einen körperfesten Bezugspunkt ein, ergibt sich der Drall analog den Beziehungen der reinen Drehung als Produkt aus Trägheitstensor und Winkelgeschwindigkeitsvektor zuzüglich einiger Korrekturterme aufgrund der Bewegung des Bezugspunkts. Besonders einfach wird die Formulierung wiederum mit dem Schwerpunkt als Bezugspunkt. Durch Ableiten bezüglich eines raumfesten Systems und Gleichsetzen mit dem äußeren Moment erhält man den Drallsatz. Dieser hat sowohl im körperfesten als auch im raumfesten Koordinatensystem formal die gleiche Gestalt.

Bei der ebenen Bewegung entfällt die Impulsgleichung in die Richtung senkrecht zur Bewegungsebene, so dass nur die beiden Gleichungen in der Bewegungsebene verbleiben. Der Drallsatz wird auf die Normalenrichtung projiziert und reduziert sich dabei auf eine einzelne Gleichung. Damit ergeben sich insgesamt 3 Gleichungen für die 3 Freiheitsgrade der ebenen Bewegung.

8.1 Impuls und Drall eines Starrkörpers

Starrkörperkinematik

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$



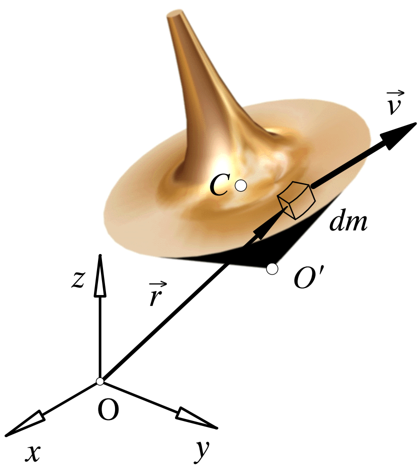
Impuls eines Starrkörpers

Impuls eines Massenpunkts dm

$$d\vec{p} = \vec{v}\,dm$$

Gesamtimpuls des Körpers

$$\vec{p} = \int_K d\vec{p} = \int_K \vec{v}\,dm$$



Starrkörperkinematik $\quad \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$

$$\vec{p} = m\,\vec{v}_{O'} + m\,\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}$$

O' : körperfester Bezugspunkt

Sonderfall: $O' \equiv C$ Schwerpunkt $\Rightarrow \quad \vec{p} = m\,\vec{v}_C$

Drall eines Starrkörpers

Impulsmoment eines Massenpunkts bez. O

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

Gesamtdrall des Körpers

$$\vec{L}_O = \int_K \vec{r} \times d\vec{p} = \int_K \vec{r} \times \vec{v}\, dm$$

Starrkörperkinematik $\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}', \quad \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + m\left[\vec{r}_{O'} \times \left(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}\right) + \vec{r}_{O'C} \times \vec{v}_{O'}\right]$$

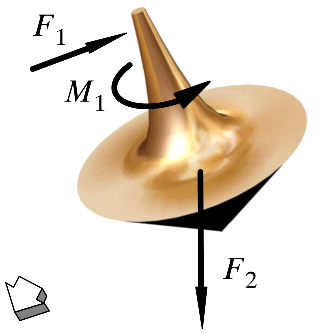
Drall bez. des körperfesten Bezugspunkts O':

- ◇ im körperfesten System: $\boldsymbol{L}_{O'K'} = \boldsymbol{I}_{O'K'}\, \boldsymbol{\omega}_{K'}$, $\boldsymbol{I}_{O'K'} = const.$
- ◇ im raumfesten System: $\boldsymbol{L}_{O'K} = \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{L}_{O'K'} = \boldsymbol{S}\, \boldsymbol{I}_{O'K'} \boldsymbol{S}^T\, \boldsymbol{\omega}_K = \boldsymbol{I}_{O'K}(t)\, \boldsymbol{\omega}_K$

Sonderfälle:

- ◇ $O' \equiv O$ Fixpunkt $\Rightarrow$ $\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} = \vec{\vec{I}}_O\, \vec{\omega}$
- ◇ $O' \equiv C$ Schwerpunkt $\Rightarrow$ $\vec{L}_O = \vec{L}_C + m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_C = \vec{\vec{I}}_C\, \vec{\omega} + m\, \vec{r}_C \times \vec{v}_C$

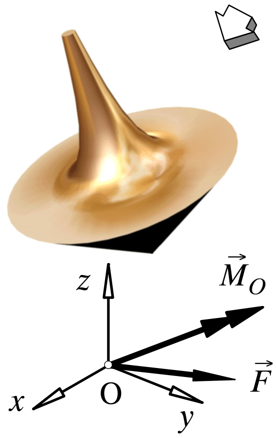
8.2 Impuls- und Drallsatz



Nach Reduktion eines allgemeinen Kräftesystems auf den resultierenden Kraftwinder bez. eines raumfesten Bezugspunkts O lassen sich folgende Gesetze auf den starren Körper anwenden:

Axiome von Euler (1775)

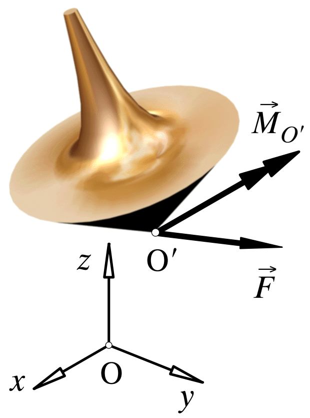
Impulssatz und Drallsatz sind unabhängige Axiome, denen die allgemeine Bewegung eines starren Körpers gehorcht:



Impulssatz: $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Drallsatz: $$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Alternative Formulierungen des Impulssatzes



körperfester Bezugspunkt O':

$$\vec{p} = m\,\vec{v}_{O'} + m\,\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\,\frac{d\vec{v}_{O'}}{dt} + m\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_{O'C} + m\,\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_{O'C}}{dt}$$

$$m\,\vec{a}_{O'} + m\,\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{O'C} + m\,\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}\right) = \vec{F}$$

Sonderfall: $O' \equiv C$ Schwerpunkt

$$m\,\vec{a}_C = \vec{F} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} m\,a_{Cx} &= F_x \\ m\,a_{Cy} &= F_y \\ m\,a_{Cz} &= F_z \end{aligned}$$

Alternative Formulierungen des Drallsatzes

körperfester Bezugspunkt O':

$$\vec{L}_O = \vec{L}_{O'} + m\left[\vec{r}_{O'} \times \left(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}\right) + \vec{r}_{O'C} \times \vec{v}_{O'}\right]$$

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} &+ m\,\vec{v}_{O'} \times \left(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}\right) \\ &+ \vec{r}_{O'} \times m\left(\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{O'C} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}\right)\right) \\ &+ m\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{O'C}\right) \times \vec{v}_{O'} + m\,\vec{r}_{O'C} \times \vec{a}_{O'}\end{aligned}$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{O'} + \vec{r}_{O'} \times \vec{F}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\vec{L}_{O'}}{dt} + m\,\vec{r}_{O'C} \times \vec{a}_{O'} = \vec{M}_{O'}$$

Sonderfälle:

- ◇ $O' \equiv O$ Fixpunkt $\Rightarrow \dfrac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$
- ◇ $O' \equiv C$ Schwerpunkt $\Rightarrow \dfrac{d\vec{L}_C}{dt} = \vec{M}_C$

Rechnung in raum- und körperfesten Koordinatensystemen:

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \frac{d'\vec{L}_C}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_C = \vec{M}_C$$

in K': $$\frac{d'\boldsymbol{L}_{CK'}}{dt} = \dot{\boldsymbol{L}}_{CK'} = \boldsymbol{I}_{CK'}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{K'}$$

in K: $$\left.\frac{d'\boldsymbol{L}_C}{dt}\right|_K = \boldsymbol{S}\,\dot{\boldsymbol{L}}_{CK'} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{CK'}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{K'} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{CK'}\,\boldsymbol{S}^T\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_K = \boldsymbol{I}_{CK}(t)\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_K$$

Der Drallsatz hat beiden Koordinatensystemen die gleiche Form:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_{CK}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_K &+ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_K\,\boldsymbol{I}_{CK}\,\boldsymbol{\omega}_K = \boldsymbol{M}_{CK} \\ \boldsymbol{I}_{CK'}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{K'} &+ \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{K'}\,\boldsymbol{I}_{CK'}\,\boldsymbol{\omega}_{K'} = \boldsymbol{M}_{CK'}\end{aligned}$$

resultierendes Moment auf Körper bez. Schwerpunkt C

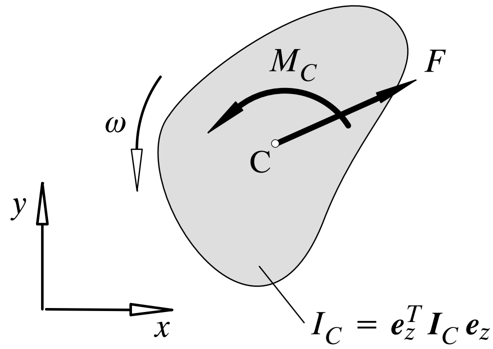
absolute Winkelgeschwindigkeit des Körpers

Trägheitstensor des Körpers bez. Schwerpunkt C

absolute Winkelbeschleunigung

8.3 Kinetik der ebenen Bewegung

In vielen Fällen genügt eine ebene Betrachtung des Systems, z.B. Bewegung in der x,y-Ebene, Drehung um die z-Achse.



Impulssatz: $m\,a_{Cx} = F_x$

$m\,a_{Cy} = F_y$

Drallsatz: $I_C\,\dot{\omega} = M_C\,,\quad C:$ *Schwerpunkt*

oder $I_O\,\dot{\omega} = M_O\,,\quad O:$ *Fixpunkt*