

7 Kreiselphänomene

Beim Massenpunkt haben der Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ und die Geschwindigkeit \vec{v} aufgrund der skalaren Masse stets die gleiche Richtung. Äußere Kräfte führen daher auf Impuls- und gleichzeitig Geschwindigkeitsänderungen in Krafrichtung. Wegen des tensoriellen Charakters der Drehträgeit haben der Drall $\vec{L}_O = \vec{I}_O \vec{\omega}$ und der Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ nicht notwendig die gleiche Richtung. Ein Kreisel gibt daher einem äußeren Moment nicht unmittelbar nach, was zu unerwarteten Phänomenen führt.

Zwingt man einen Rotor zu einer Drehung um eine vorgegebene Achse, die keine Hauptachse ist, versucht er rechtwinklig dazu auszuweichen und erzeugt ein Kreiselmoment, das über die Lager abgefangen werden muss. Die Richtung des Kreiselmoments hängt vom Verhältnis der Trägheitsmomente ab: Ein abgeplatteter Rotor versucht, sich zu zentrieren, während ein gestreckter Rotor eine vorhandene Schrägstellung weiter verstärkt.

Der Drall eines momentenfreien Kreisels bleibt konstant, sein Drallvektor ist raumfest. Dreht der Kreisel dabei um eine seiner Hauptachsen, fallen Winkelgeschwindigkeits- und Drallrichtung zusammen, der Kreisel führt dann permanente Drehungen aus. Stößt man ihn leicht aus dieser Situation, entstehen bei Drehungen um Achsen seines kleinsten und größten Hauptträgheitsmoments stabile Schwingungen, die man als Nutation bezeichnet, während Drehungen um die Achse des mittleren Hauptträgheitsmoments instabil sind. Symmetrische Kreisel drehen um ihre Symmetrieachse stets stabil.

Äußere Momente auf einen Kreisel bewirken eine Dralländerung. Wird das Moment mit dem Kreisel mitgeführt, entsteht eine Präzessionsbewegung, bei welcher der Kreisel stets senkrecht zum Moment ausweicht. Dieses Phänomen lässt sich z.B. beim schweren Kreisel, beim Bumerang oder bei fliegenden Diskus- und Frisbeescheiben beobachten.



7.1 Kraftwirkung von Rotoren

Drallsatz

$$I_O \dot{\omega} + \tilde{\omega} I_O \omega = M_O$$

↙ im körperfesten Hauptachsensystem

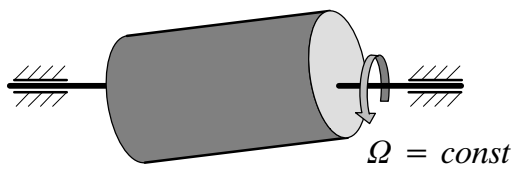
$$A_O \dot{\omega}_{x'} - (B_O - C_O) \omega_{y'} \omega_{z'} = M_{Ox'}$$

$$B_O \dot{\omega}_{y'} - (C_O - A_O) \omega_{z'} \omega_{x'} = M_{Oy'}$$

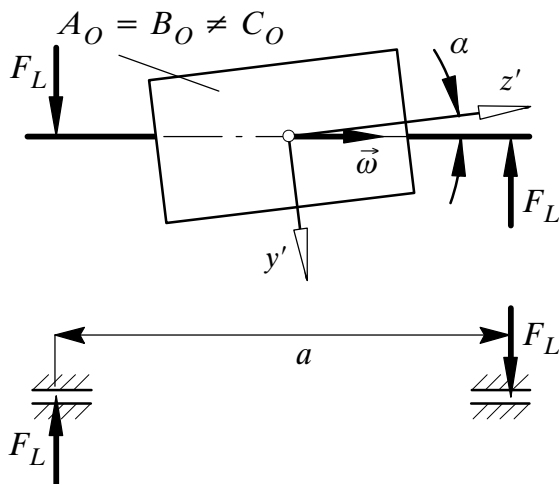
$$C_O \dot{\omega}_{z'} - (A_O - B_O) \omega_{x'} \omega_{y'} = M_{Oz'}$$

dynamische Eulergleichungen

Gelagerter Rotor



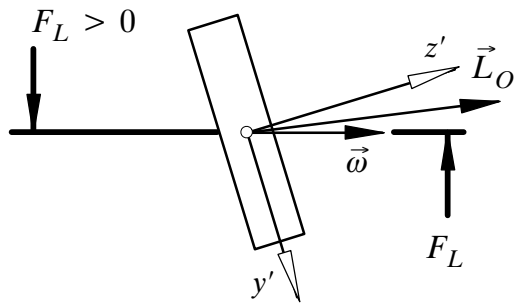
↙ Freischneiden



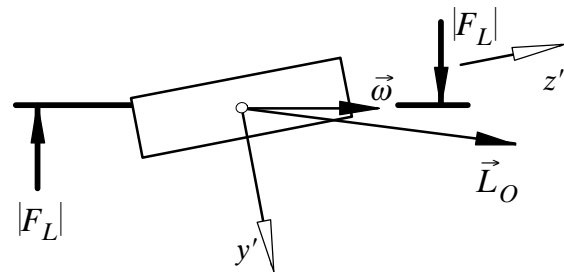
Kreiselmoment

Ann.: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

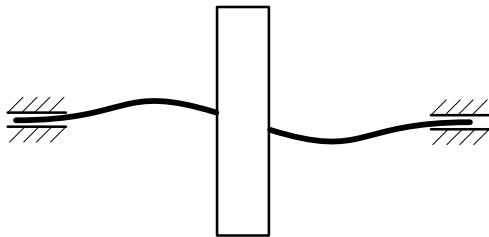
abgeplatteter Rotor $C_O > A_O$



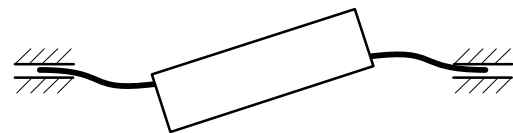
gestreckter Rotor $C_O < A_O$



elastische Welle



elastische Welle



Gleichsinniger Parallelismus: Das Kreiselmoment sucht stets, den Drallvektor \vec{L}_O zum Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ hin zu drehen.



7.2 Nutation

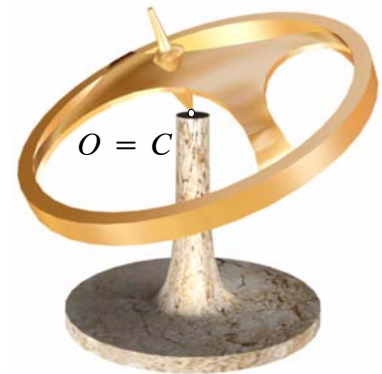
Momentenfreier Kreisel

momentenfrei: $\vec{M}_O = \vec{0}$



Drallsatz: $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{L}_O = \text{const}$$



Drehungen um Hauptachsen

Drallsatz im körperfesten Hauptachsensystem (dynamische Eulergleichungen)

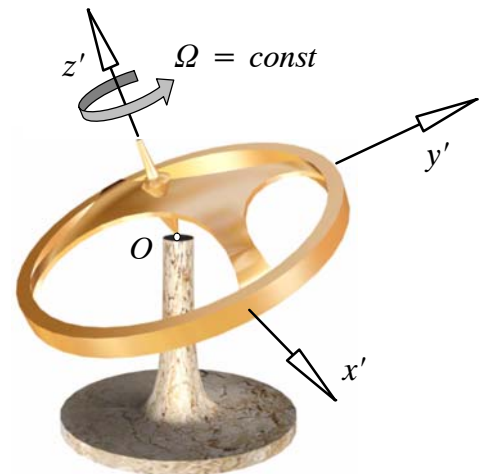
$$A_O \dot{\omega}_{x'} - (B_O - C_O) \omega_{y'} \omega_{z'} = 0$$

$$B_O \dot{\omega}_{y'} - (C_O - A_O) \omega_{z'} \omega_{x'} = 0$$

$$C_O \dot{\omega}_{z'} - (A_O - B_O) \omega_{x'} \omega_{y'} = 0$$

stationäre Lösung:

$$\omega_{K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \text{const.}$$



Permanente Drehungen: Der momentenfreie Kreisel kann permanente Drehungen um seine Hauptachsen ausführen.

Nachbarbewegungen

$$\text{Ansatz: } \omega_{K'} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_{x'}(t) \\ \tilde{\omega}_{y'}(t) \\ \Omega + \tilde{\omega}_{z'}(t) \end{bmatrix}, \quad \tilde{\omega}_{x'}, \tilde{\omega}_{y'}, \tilde{\omega}_{z'} \ll \Omega$$

$$\text{eingesetzt: } A_O \dot{\tilde{\omega}}_{x'} - (B_O - C_O) \tilde{\omega}_{y'} \Omega = 0$$

$$B_O \dot{\tilde{\omega}}_{y'} - (C_O - A_O) \Omega \tilde{\omega}_{x'} = 0$$

$$C_O \dot{\tilde{\omega}}_{z'} = 0$$

Entkopplung: $\ddot{\tilde{\omega}}_{x'} + \Omega^2 \frac{(C_O - A_O)(C_O - B_O)}{A_O B_O} \tilde{\omega}_{x'} = 0$

$$\ddot{\tilde{\omega}}_{y'} + \Omega^2 \frac{(C_O - A_O)(C_O - B_O)}{A_O B_O} \tilde{\omega}_{y'} = 0$$



Fall I: $(C_O - A_O)(C_O - B_O) < 0$

Fall II: $(C_O - A_O)(C_O - B_O) > 0$

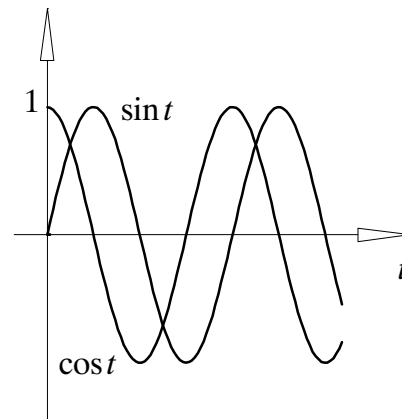
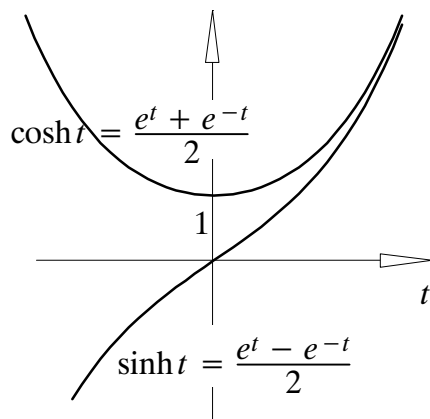


Dgl.: $\ddot{\tilde{\omega}} - \mu^2 \tilde{\omega} = 0$

Dgl.: $\ddot{\tilde{\omega}} + \mu^2 \tilde{\omega} = 0$

Lsg.: $\tilde{\omega} = k_1 \sinh \mu t + k_2 \cosh \mu t$

Lsg.: $\tilde{\omega} = k_1 \sin \mu t + k_2 \cos \mu t$



Anmerkung: Integrationskonstanten k_1, k_2 folgen aus den Anfangsbedingungen

Stabilitätscharakter der permanenten Drehungen

| Trägheitsmomente | Drehachse | Fall | Stabilität |
|--|--|------|------------|
| $A_O > B_O > C_O$ $B_O > A_O > C_O$ | kleinstes Hauptträgheitsmoment | II | stabil |
| $A_O > C_O > B_O$ $B_O > C_O > A_O$ | mittleres Hauptträgheitsmoment | I | instabil |
| $C_O > A_O > B_O$ $C_O > B_O > A_O$ | größtes Hauptträgheitsmoment | II | stabil |
| $A_O = B_O > C_O$ $C_O > A_O = B_O$ | Symmetrieachse eines symmetrischen Kreisels | II | stabil |



Nutation des symmetrischen Kreisels ($A_O = B_O$)

$$\text{allg. Lösung: } \boldsymbol{\omega}_{K'} = \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_0 \cos(\mu t - \varphi) \\ \tilde{\omega}_0 \sin(\mu t - \varphi) \\ \Omega \end{bmatrix},$$

$$\text{mit } \tilde{\omega}_0, \varphi, \Omega = \text{const},$$

$$\mu = \Omega \frac{C_O - A_O}{A_O}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathbf{L}_{OK'} &= \mathbf{I}_{OK'} \boldsymbol{\omega}_{K'} \\ &= \begin{bmatrix} A_O \tilde{\omega}_0 \cos(\mu t - \varphi) \\ A_O \tilde{\omega}_0 \sin(\mu t - \varphi) \\ C_O \Omega \end{bmatrix} \\ &\equiv A_O \boldsymbol{\omega}_{K'} + (C_O - A_O) \Omega \mathbf{e}_{z'} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{K'} &= \frac{1}{A_O} [\mathbf{L}_{OK'} - (C_O - A_O) \Omega \mathbf{e}_{z'}] \\ &\approx \frac{C_O}{A_O} \Omega \mathbf{e}_L + \left(1 - \frac{C_O}{A_O}\right) \Omega \mathbf{e}_{z'} \end{aligned}$$

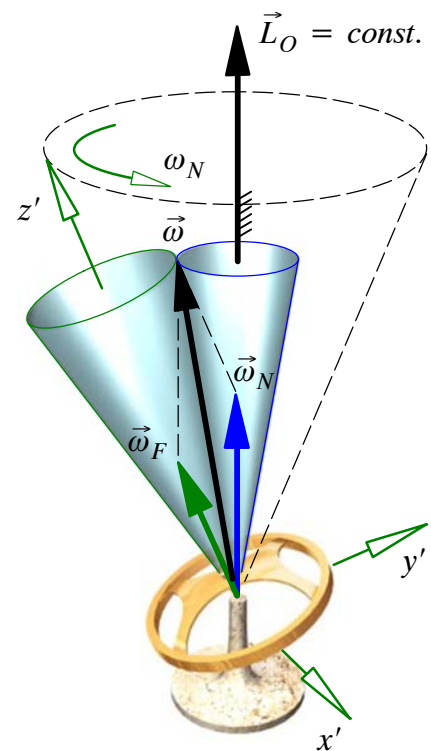
$$\rightarrow \vec{\omega} \approx \omega_N \vec{e}_L + \omega_F \vec{e}_{z'}$$

└ Eigendrehung um Figurenachse mit

$$\omega_F = \left(1 - \frac{C_O}{A_O}\right) \Omega$$

└ Nutation: Umlauf der Figurenachse auf raumfestem Kegel mit Nutationsfrequenz

$$\omega_N = \frac{C_O}{A_O} \Omega$$



7.3 Präzession

Schwerer symmetrischer Kreisel

Koordinatensystem: geneigtes, um die vertikale Achse mitpräzedierendes Koordinatensystem K' mit der Winkelgeschwindigkeit

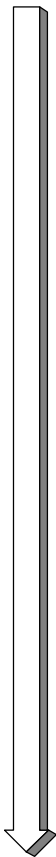
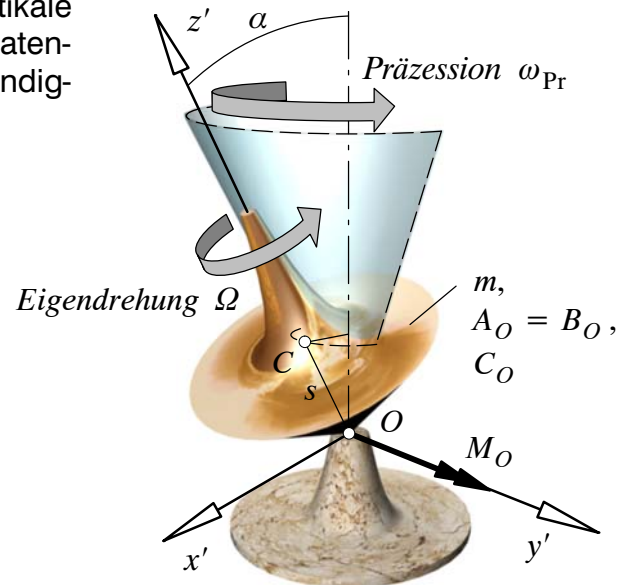
$$\vec{\omega}_{K'} = \begin{bmatrix} -\omega_{Pr} \sin \alpha \\ 0 \\ \omega_{Pr} \cos \alpha \end{bmatrix}$$

↳ Ableitungsregel

Drallsatz:
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d'\vec{L}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

stationäre

Lösung: $\omega_{Pr}, \Omega = const.$

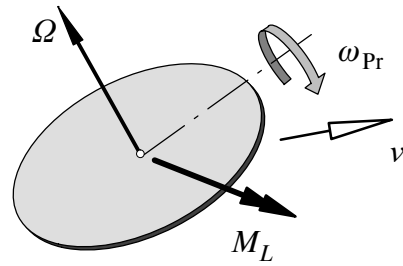


Präzessionsfrequenz für $\alpha = 90^\circ$: $\omega_{Pr} = \frac{mgs}{C_O \Omega}$

Paradoxon der Kreisellehre: Ein Kreisel gibt einem äußeren Moment nicht nach, sondern weicht rechtwinklig dazu aus

**Beispiele: Diskus, Frisbee, Bumerang, Bierfilz**

linkshändiger Wurf: Wegkippen nach rechts



rechtshändiger Wurf: Wegkippen nach links

