6 Kinetik der Starrkörperdrehung

Wie bereits gesehen, setzt sich die allgemeine Starrkörperbewegung aus der Translation eines körperfesten Bezugspunktes und einer Drehung um diesen zusammen. Während die Translation des Bezugspunktes weitgehend den bereits bekannten Gesetzmäßigkeiten des Massenpunkts entspricht, ist die Starrkörperdrehung etwas qualitativ neues und soll im Folgenden zunächst isoliert als reine Drehung um einen raum- und körperfesten Bezugspunkt, einen sogenannten Fixpunkt, betrachtet werden.

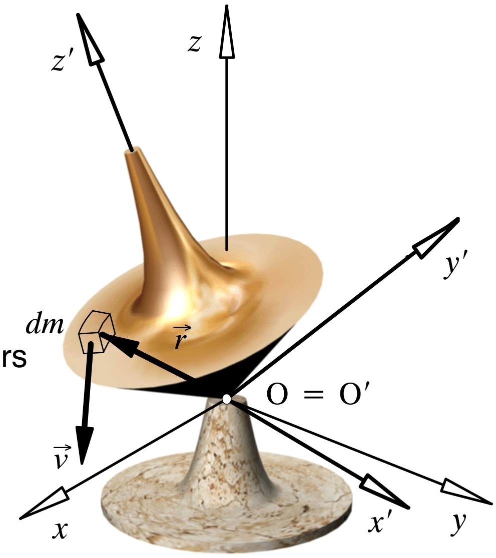
Dem Impulsvektor des bewegten Massenpunkts entspricht bei der Starrkörperdrehung der Drallvektor, der als Impulsmoment bezüglich eines raumfesten Punktes definiert ist. Für den Massenpunkt ergibt sich der Drallvektor damit als Kreuzprodukt aus Abstandsvektor und Impulsvektor, für einen ausgedehnten Körper muss dieses Produkt zusätzlich über alle Massenelemente aufintegriert werden. Mit Hilfe der Starrkörperkinematik lässt sich der Drall eines starren Körpers auf ein Produkt aus Trägheitstensor und Winkelgeschwindigkeitsvektor zurückführen.

Für einen einzelnen Massenpunkt folgt aus dem Impulssatz zwangsläufig der Drallsatz, d.h. die Änderung des Dralls bezüglich eines raumfesten Bezugspunkts entspricht dem resultierenden Moment bezüglich dieses Punktes. Für starre Körper ist der Drallsatz jedoch ein unabhängiges Grundgesetz, was in der Statik der Unabhängigkeit der Bedingungen des Kräfte- und Momentengleichgewichts entspricht. Den 3 Freiheitsgraden der Rotation entsprechend ist der Drallsatz eine vektorielle Beziehung, die sowohl im Inertialsystem als auch im körperfesten System dargestellt werden kann und formal auf den gleichen Zusammenhang führt.

Im Allgemeinen lässt sich der für die Drallberechnung benötigte Trägheitstensor nur in einem körperfesten System sinnvoll berechnen. Die Diagonalelemente des Trägheitstensors bezeichnet man als Massenträgheitsmomente, die Nebendiagonalelemente als Massendeviationsmomente. Aufgrund der Symmetrie lässt sich mit Hilfe des Eigenwertproblems immer ein Hauptachsensystem finden, in dem der Trägheitstensor Diagonalgestalt hat. Für einfache Körper sind die Massenträgheitsmomente tabelliert, für zusammengesetzte Körper können sie durch Summation unter Berücksichtigung der Huygens-Steiner Beziehungen ermittelt werden.

Zur Formulierung des Drallsatzes im körperfesten Koordinatensystem kann der so berechnete Trägheitstensor direkt verwendet werden. Benutzt man ein körperfestes Hauptachsensystem, entstehen die sogenannten dynamischen Eulergleichungen. Für die Formulierung des Drallsatzes im Inertialsystem muss der körperbezogene Trägheitstensor mit Hilfe der Drehungsmatrix entsprechend den Regeln der Koordinatentransformation umgerechnet werden.

6.1 Drall eines Starrkörpers



Definitionen

Impuls eines Massenpunkts dm

$$d\vec{p} = \vec{v}\,dm$$

Impulsmoment eines Massenpunkts bez. O

$$d\vec{L}_O = \vec{r} \times d\vec{p} = \vec{r} \times \vec{v}\,dm$$

Drall (Impulsmoment, Drehimpuls) eines starren Körpers

$$\vec{L}_O = \int_K \vec{r} \times d\vec{p} = \int_K \vec{r} \times \vec{v}\,dm$$

Berechnung des Dralls

Starrkörperkinematik
$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,' \qquad \vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

Fixpunkt $O' = O$

$$\vec{r} = \vec{r}\,' \qquad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

eingesetzt in Drall:
$$\vec{L}_O = \int_K \vec{r} \times \vec{v}\,dm = \int_K \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,dm$$

$$\rightarrow \quad \vec{L}_O = -\int_K \vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})\,dm \equiv -\int_K \vec{r}\,' \times (\vec{r}\,' \times \vec{\omega})\,dm$$

im raumfesten System K:

$$\boldsymbol{L}_{OK} = -\int_K \tilde{\boldsymbol{r}}_K \tilde{\boldsymbol{r}}_K \boldsymbol{\omega}_K\,dm \equiv \underbrace{-\int_{K(t)} \tilde{\boldsymbol{r}}_K(t)\,\tilde{\boldsymbol{r}}_K(t)\,dm}_{=:\,\boldsymbol{I}_{OK}(t)} \;\boldsymbol{\omega}_K \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L}_{OK}(t) = \boldsymbol{I}_{OK}(t)\,\boldsymbol{\omega}_K(t)$$

$=: \boldsymbol{I}_{OK}(t)$ Trägheitstensor bez. O in K

im körperfesten System K' :

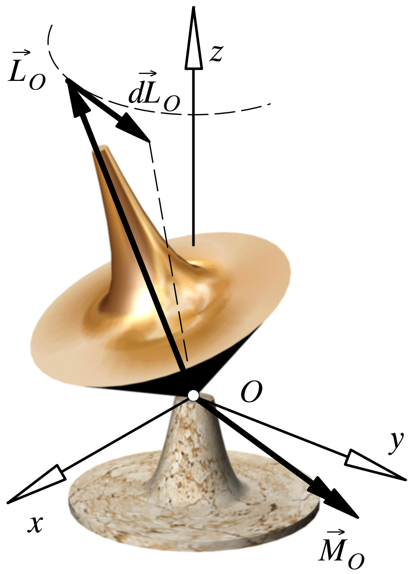
$$\boldsymbol{L}_{OK'} = -\int_K \tilde{\boldsymbol{r}}'_{K'}\,\tilde{\boldsymbol{r}}'_{K'}\,\boldsymbol{\omega}_{K'}\,dm \equiv \underbrace{-\int_K \tilde{\boldsymbol{r}}'_{K'}\,\tilde{\boldsymbol{r}}'_{K'}\,dm}_{=:\,\boldsymbol{I}_{OK'}} \;\boldsymbol{\omega}_{K'} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{L}_{OK'} = \boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{\omega}_{K'}(t)$$

$=: \boldsymbol{I}_{OK'}$ Trägheitstensor bez. O=O' in K'

Zusammenhang:
$$\boldsymbol{L}_{OK} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{L}_{OK'} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{\omega}_{K'} = \underbrace{\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{S}^T}\,\boldsymbol{\omega}_K$$

$$\boldsymbol{I}_{OK}(t) = \boldsymbol{S}(t)\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{S}^T(t)$$

6.2 Drallsatz



Drallsatz (Euler, 1775)

Die Drehbewegung eines starren Körpers mit dem Fixpunkt O und dem resultierenden Moment $\vec{M}_O$ bez. O gehorcht der Beziehung

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Drallsatz in Koordinatendarstellung

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d'\vec{L}_O}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

- in K' : $\dfrac{d'\boldsymbol{L}_{OK'}}{dt} = \dot{\boldsymbol{L}}_{OK'} = \boldsymbol{I}_{OK'}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{K'}$
- in K : $\left.\dfrac{d'\boldsymbol{L}_O}{dt}\right|_K = \boldsymbol{S}\,\dot{\boldsymbol{L}}_{OK'} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_{K'} = \underbrace{\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{S}^T}_{\boldsymbol{I}_{OK}(t)}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_K$

Der Drallsatz hat in beiden Koordinatensystemen (K und K') die gleiche Form:

$$\boldsymbol{I}_O\,\dot{\boldsymbol{\omega}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{I}_O\,\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_O$$

- $\boldsymbol{M}_O$: *resultierendes Moment auf Körper bez. Fixpunkt O*
- $\boldsymbol{\omega}$: *absolute Winkelgeschwindigkeit des Körpers*
- $\boldsymbol{I}_O$: *Trägheitstensor des Körpers bez. Fixpunkt O*
- $\dot{\boldsymbol{\omega}}$: *absolute Winkelbeschleunigung*

Drehung um eine feststehende Achse (z.B. ebene Bewegung)

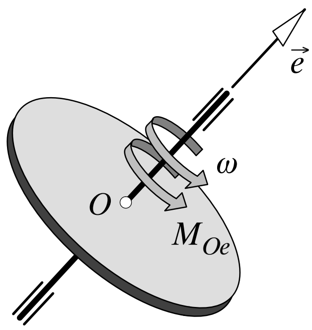
Achse $\vec{e}$ ($\|\vec{e}\| = 1$): $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\boldsymbol{e}$

⇩

$$\boldsymbol{I}_O\,\dot{\omega}\,\boldsymbol{e} + \omega^2\,\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{I}_O\,\boldsymbol{e} = \boldsymbol{M}_O$$

$$\underbrace{\boldsymbol{e}^T\,\boldsymbol{I}_O\,\boldsymbol{e}}_{I_{Oe}}\,\dot{\omega} = \underbrace{\boldsymbol{e}^T\,\boldsymbol{M}_O}_{M_{Oe}}$$

$$I_{Oe}\,\dot{\omega} = M_{Oe}$$



6.3 Trägheitstensor

Der Trägheitstensor wird im Allgemeinen im körperfesten Koordinatensystem berechnet und gegebenenfalls gemäß $\boldsymbol{I}_{OK} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{S}^T$ transformiert.

Definition

im körperfesten System $$\boldsymbol{I}_{OK'} = -\int_K \tilde{\boldsymbol{r}}'_{K'}\,\tilde{\boldsymbol{r}}'_{K'}\,dm = \begin{bmatrix} I_{x'x'} & I_{x'y'} & I_{x'z'} \\ I_{x'y'} & I_{y'y'} & I_{y'z'} \\ I_{x'z'} & I_{y'z'} & I_{z'z'} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}^T_{OK'}$$

Direkte Berechnung

Massenträgheitsmomente $$I_{x'x'} = \int_K \left(y'^2 + z'^2\right)dm \ , \quad I_{y'y'} = \int_K \left(z'^2 + x'^2\right)dm$$
$$I_{z'z'} = \int_K \left(x'^2 + y'^2\right)dm$$

Massendeviationsmomente $$I_{x'y'} = -\int_K x'y'\,dm \ , \quad I_{y'z'} = -\int_K y'z'\,dm$$
$$I_{x'z'} = -\int_K x'z'\,dm$$

Dreiecksungleichungen $$I_{x'x'} + I_{y'y'} \geq I_{z'z'}$$
$$I_{y'y'} + I_{z'z'} \geq I_{x'x'}$$
$$I_{z'z'} + I_{x'x'} \geq I_{y'y'}$$

Hauptachsensystem

Aufgrund der Symmetrie des Trägheitstensors existiert für jeden Körper ein Koordinatensystem (Hauptachsensystem H), für das die Deviationsmomente verschwinden.

Hauptträgheitsmomente $$\boldsymbol{I}_{OH} = \begin{bmatrix} A_O & 0 & 0 \\ 0 & B_O & 0 \\ 0 & 0 & C_O \end{bmatrix}$$

allg. Bestimmung aus Eigenwertproblem $\left(\lambda\,\boldsymbol{E} - \boldsymbol{I}_{OK'}\right)\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \ \rightarrow$ Eigenwerte $\lambda_i \ \hat{=}\ A_O, B_O, C_O$
Eigenvektoren $\hat{\boldsymbol{x}}_i \ \hat{=}\ \textit{Hauptachsen}$

anschaulich: Achsen senkrecht zu Symmetrieebenen sind Hauptachsen

spezielle Trägheitseigenschaften: rotationssymmetrisch z.B. $A_O = B_O$
kugelsymmetrisch $A_O = B_O = C_O$

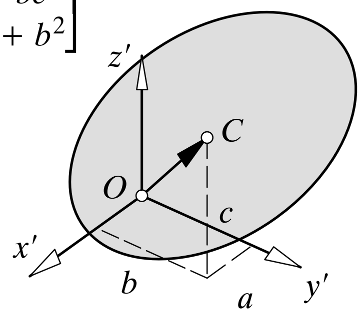
Koordinatentransformation

◇ Koordinatendrehung $\qquad \boldsymbol{I}_{OK} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{I}_{OK'}\,\boldsymbol{S}^T$

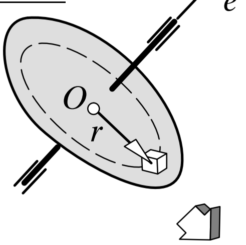
◇ Wechsel des Bezugspunkts (Huygens–Steiner Gleichungen)

allgemeiner Punkt O,
Schwerpunkt C

$$\boldsymbol{I}_O = \boldsymbol{I}_C + m\begin{bmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & c^2+a^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}$$

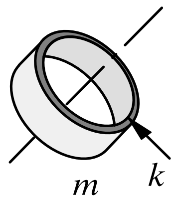


(Massen-)Trägheitsmoment bezüglich einer festen Drehachse $\vec{e}$



Trägheitsmoment: $\qquad I_{Oe} = \int\limits_K r^2\,dm = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{I}_O\,\boldsymbol{e}$

Trägheitsradius k : $\qquad I_{Oe} \overset{!}{=} k^2 m \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{\dfrac{I_{Oe}}{m}}$

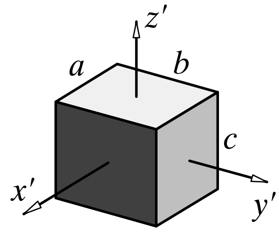
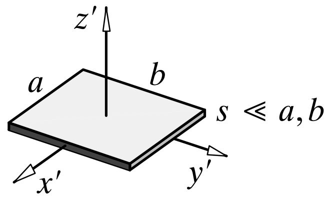
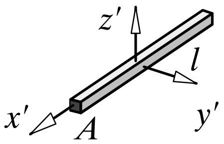
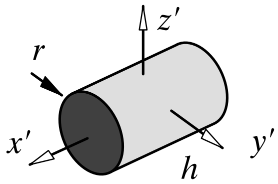
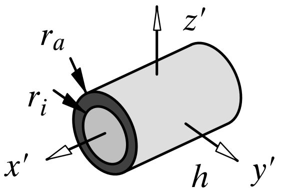
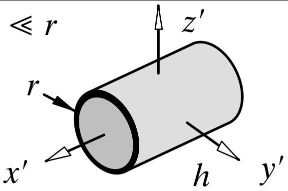
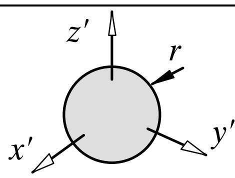
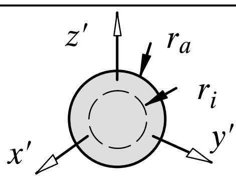
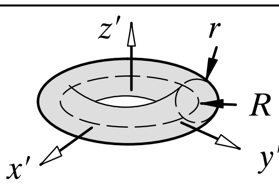


Vereinfachte Berechnung für zusammengesetzte Körper

zusammengesetzter
Körper: $\qquad K = \bigcup\limits_i K_i$

$$\boldsymbol{I}_O = \sum_i \boldsymbol{I}_{Oi}$$

└ Trägheitstensor des Teilkörpers K_i
aus Tabellen

Körper	Geometrie	Masse	Trägheitsmomente bez. Schwerpunkt
Quader		$m = \rho\, abc$	$I_{x'x'} = \frac{m}{12}(b^2 + c^2)$ $I_{y'y'} = \frac{m}{12}(c^2 + a^2)$ $I_{z'z'} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
Platte		$m = \rho\, abs$	$I_{x'x'} = \frac{m}{12} b^2$ $I_{y'y'} = \frac{m}{12} a^2$ $I_{z'z'} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$
dünner Stab		$m = \rho\, Al$	$I_{x'x'} = 0$ $I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{m}{12} l^2$
Kreis-zylinder		$m = \rho\, \pi r^2 h$	$I_{x'x'} = \frac{1}{2} m r^2$ $I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{m}{12}(3r^2 + h^2)$
Hohl-zylinder		$m = \rho\, \pi (r_a^2 - r_i^2) h$	$I_{x'x'} = \frac{m}{2}\left(r_a^2 + r_i^2\right)$ $I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{m}{4}\left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{h^2}{3}\right)$
Zylinder-schale	$s \ll r$ 	$m = \rho\, 2\pi r\, sh$	$I_{x'x'} = m r^2$ $I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{m}{12}(6r^2 + h^2)$
Kugel		$m = \rho\, \frac{4}{3}\pi r^3$	$I_{x'x'} = I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{2}{5} m r^2$
Hohl-kugel		$m = \rho\, \frac{4}{3}\pi (r_a^3 - r_i^3)$	$I_{x'x'} = I_{y'y'} = I_{z'z'} = \frac{2}{5} m \frac{r_a^5 - r_i^5}{r_a^3 - r_i^3}$
Kreis-torus		$m = \rho\, 2\pi^2 r^2 R$	$I_{x'x'} = I_{y'y'} = \frac{m}{8}(4R^2 + 5r^2)$ $I_{z'z'} = \frac{m}{4}(4R^2 + 3r^2)$