5 Kinematik der Starrkörperbewegung

Ein starrer Körper ist eine Idealisierung eines Maschinenteils, bei der man Verformungen vernachlässigt. Verbindet man mit dem Körper in einem beliebigen Bezugspunkt ein körperfestes Koordinatensystem, können sich die einzelnen materiellen Punkte des Körpers relativ dazu nicht verschieben. Daher lässt sich die Bewegung eines starren Körpers vollständig als Bewegung des körperfesten Koordinatensystems relativ zu einem Inertialsystem beschreiben.

Wie bereits aus der Relativkinematik bekannt, kann die Orientierung eines bewegten Koordinatensystems durch eine orthogonale Drehungsmatrix beschrieben werden. Diese enthält 9 Richtungskosinusse, die aufgrund der Orthogonalität 6 Bindungsgleichungen unterliegen. Daher sind nur 3 Größen frei wählbar, d.h. die freie Drehbewegung eines starren Körpers hat 3 Freiheitsgrade, die z.B. durch drei hintereinandergeschaltete Elementardrehungen beschrieben werden können. Die Gesamtdrehungsmatrix ergibt sich dann als Produkt der Elementardrehmatrizen, der Winkelgeschwindigkeitsvektor als Vektorsumme der Elementarwinkelgeschwindigkeiten.

Eine allgemeine Bewegung des Starrkörpers setzt sich aus der Translation des Bezugspunktes und der Drehbewegung des körperfesten Koordinatensystems um den Bezugspunkt mit jeweils 3 Freiheitsgraden zusammen, so dass der freie starre Körper insgesamt 6 Freiheitsgrade hat. Aus den Beziehungen der Relativkinematik folgen unter Berücksichtigung des Verschwindens der Relativbewegung sofort die Beziehungen der Starrkörperkinematik. Das Geschwindigkeitsfeld der allgemeinen Starrkörperbewegung lässt sich als vektorielle Überlagerung der Geschwindigkeitsfelder der Translation und der Rotation interpretieren. Bei der Translation haben alle Punkte die gleiche Geschwindigkeit wie der Bezugspunkt, bei der Rotation bewegen sich alle Punkte auf Kreisbahnen um den Bezugspunkt mit Geschwindigkeiten proportional zum Abstand vom Bezugspunkt.

Bei vielen technischen Problemstellungen genügt eine ebene Betrachtung, d.h. die Translation erfolgt in einer Ebene, die Drehung um eine Achse senkrecht dazu. Jede solche ebene Bewegung kann momentan als reine Drehbewegung um einen Momentanpol aufgefasst werden, so dass die Geschwindigkeiten aller Körperpunkte senkrecht auf den Polstrahlen stehen und proportional zum Polabstand sind. Der Momentanpol ist ein mathematischer Punkt, der momentan mit dem körperfesten Punkt ohne Geschwindigkeit zusammenfällt, sich selbst i. Allg. aber sowohl relativ zum Inertialsystem als auch relativ zum körperfesten Koordinatensystem bewegt. Die Bahn des Momentanpols im Inertialsystem bezeichnet man als Spurkurve, im körperfesten Koordinatensystem als Polkurve.

5.1 Beschreibung von Drehbewegungen

Drehbewegung eines starren Körpers

Bewegung eines starren Körpers um einen zusammenfallenden **raum- und körperfesten** Punkt $O = O'$, beschreibbar mit Mitteln der Relativkinematik

$$\boldsymbol{r}_K = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{r}_{K'}$$

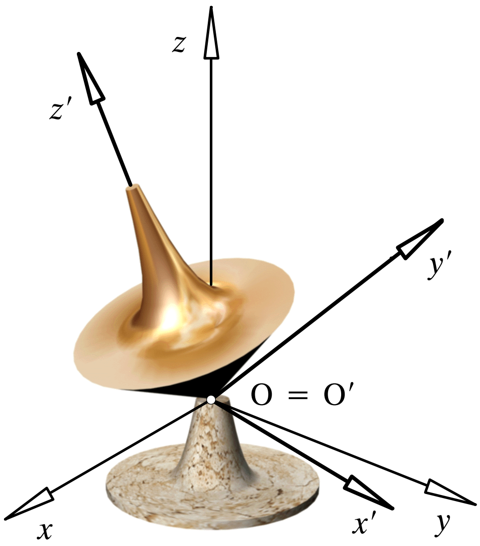
Drehungsmatrix $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix}$

- ◇ 9 Richtungskosinusse S_{ij}
- ◇ Orthogonalität $\boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}$

  $\hat{=}$ 6 Bindungen

Die Drehbewegung hat 3 Freiheitsgrade

→ beschreibbar durch 3 voneinander unabhängige Koordinaten



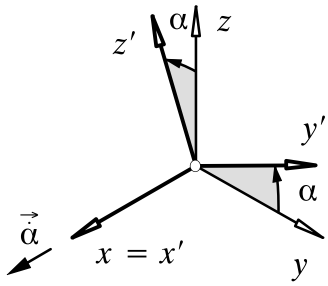
Darstellung von Drehbewegungen durch Elementardrehungen

Elementardrehungen

▶ um x–Achse

$$\boldsymbol{S}_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

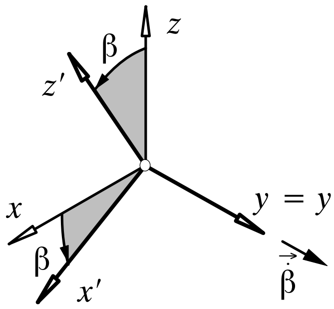
$$\dot{\boldsymbol{\alpha}}_K = \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{K'} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



▶ um y–Achse

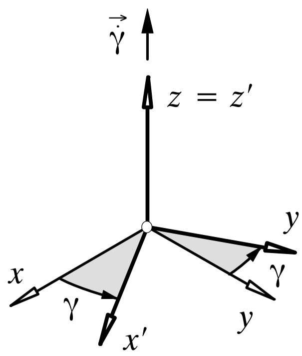
$$\boldsymbol{S}_{y,\beta} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}$$

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}_K = \dot{\boldsymbol{\beta}}_{K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix}$$



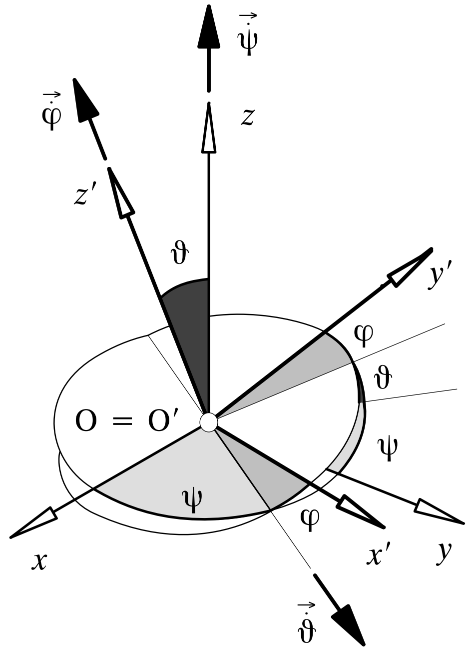
▶ um z–Achse $\quad \boldsymbol{S}_{z,\gamma} = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\dot{\gamma}_K = \dot{\gamma}_{K'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$



<u>Jede räumliche Drehung ist darstellbar durch eine Hintereinanderschaltung von drei Elementardrehungen</u>

(Beispiel: Eulerwinkel $\psi \rightarrow \vartheta \rightarrow \varphi$)



<u>Drehungsmatrix</u>

Multiplikation der Elementardrehmatrizen

Beispiel: Eulerwinkel

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{z,\psi}\,\boldsymbol{S}_{x,\vartheta}\,\boldsymbol{S}_{z,\varphi}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ 0 & \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\vartheta\cos\varphi & \sin\psi\sin\vartheta \\ \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\sin\varphi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\vartheta\cos\varphi & -\cos\psi\sin\vartheta \\ \sin\vartheta\sin\varphi & \sin\vartheta\cos\varphi & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

Winkelgeschwindigkeit

1.Weg: Differentiation der Drehmatrix und Rösselsprung

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_K = \dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}^T = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Rösselsprung}} \boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

2.Weg: Addition der Elementardrehgeschwindigkeiten

Beispiel: Eulerwinkel

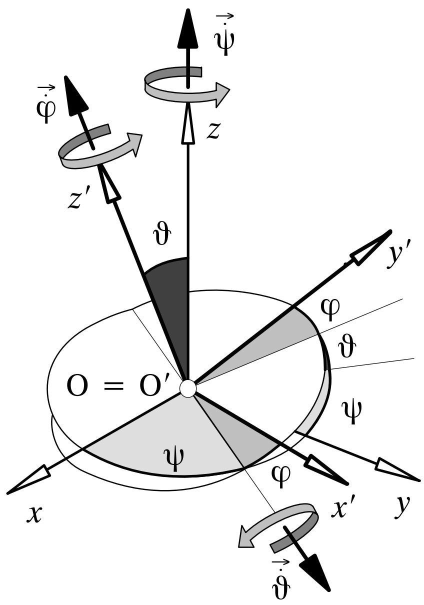
$$\vec{\omega} = \vec{\dot{\psi}} + \vec{\dot{\vartheta}} + \vec{\dot{\varphi}}$$

in körperfesten Koordinaten:

$$\boldsymbol{\omega}_{K'} = \begin{bmatrix} \sin\vartheta \, \sin\varphi \\ \sin\vartheta \, \cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{bmatrix} \dot{\psi} + \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \dot{\vartheta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \dot{\varphi}$$

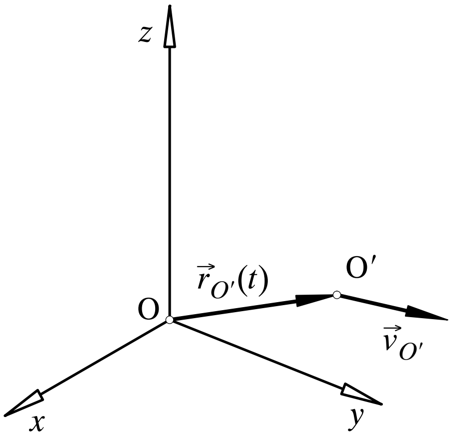
$$\begin{bmatrix} \omega_{x'} \\ \omega_{y'} \\ \omega_{z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\vartheta \, \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \sin\vartheta \, \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \cos\vartheta & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

kinematische Eulergleichungen

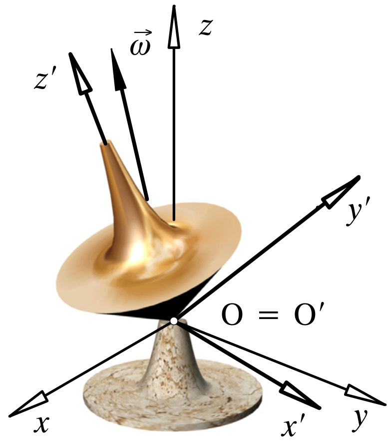


5.2 Allgemeine Bewegung eines starren Körpers

Zusammengesetzte Bewegung

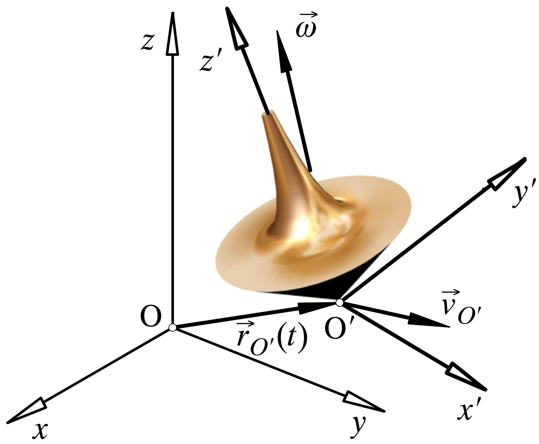


räumliche Punktbewegung $\boldsymbol{r}_{O'}(t)$



räumliche Drehbewegung $\boldsymbol{r}_K = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{r}_{K'}\,,\quad \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}$

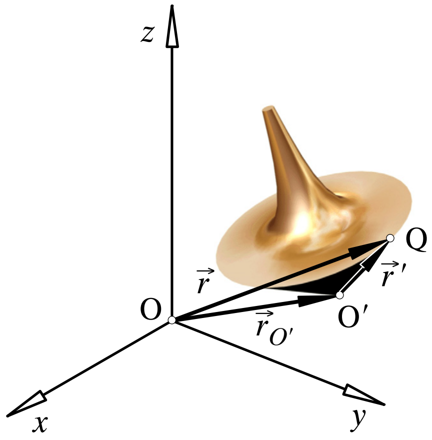
allgemeine Starrkörperbewegung



allg. Relativkinematik

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' + \vec{v}\,'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,') + 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}\,' + \vec{a}\,'$$

Starrkörper

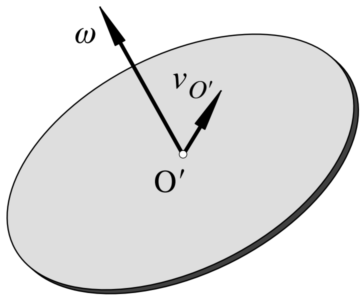


Starrkörperkinematik

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}\,'$$
$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$
$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}\,' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}\,')$$

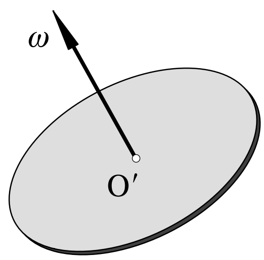
Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,'$$

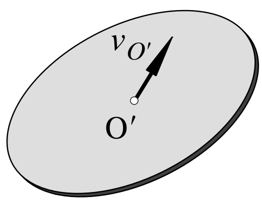


Sonderfälle:

◇ $\vec{v}_{O'} = \vec{0}$ Körper mit Fixpunkt → reine Drehbewegung



◇ $\vec{\omega} = \vec{0}$ → reine Translation

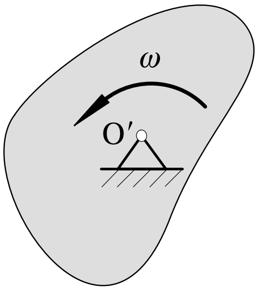


5.3 Ebene Bewegung

In vielen Fällen genügt eine ebene Betrachtung des Systems, z.B. Bewegung in der x,y-Ebene, Drehung um die z-Achse.

<u>Drehung um einen Fixpunkt</u>

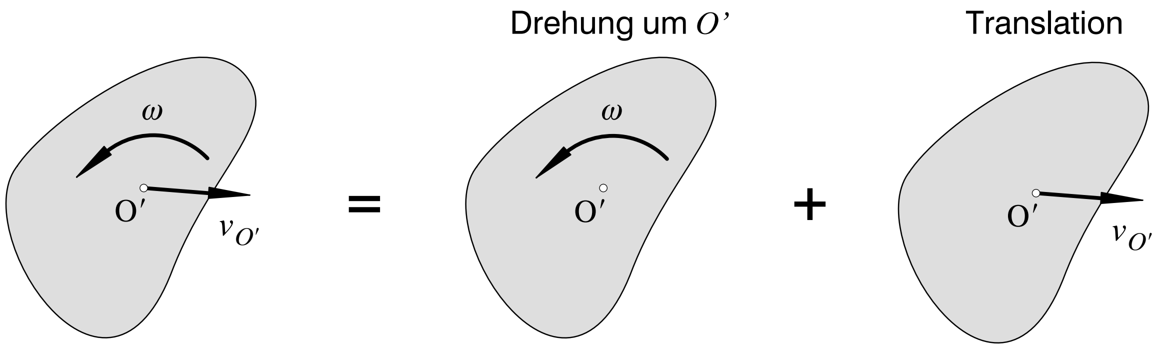
$$\boldsymbol{v}_{O'} = \boldsymbol{0} \;\rightarrow\; \boldsymbol{v} = \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{r}' \;\rightarrow\; v = \omega\, r'$$



$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \qquad \left[\frac{\mathrm{rad}}{s}\right]$$

<u>Allgemeine Bewegung</u>

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_{O'} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{r}'$$



Momentanpol

Jede ebene Bewegung kann zu jedem Zeitpunkt als reine Drehung um einen Bezugspunkt P (**Momentanpol**) aufgefasst werden:

$$\vec{r}'_P = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2}$$

Eigenschaften:

◇ Der Momentanpol verändert seine Lage sowohl

bez. des raumfesten Koordinatensystems → **Spurkurve** $\boldsymbol{r}_{PK}(t) = \boldsymbol{r}_{O'K} + \boldsymbol{r}'_{PK}$

als auch bez. des körperfesten Systems → **Polkurve** $\boldsymbol{r}'_{PK'}(t)$

◇ Pol- und Spurkurve berühren sich im Momentanpol und rollen aufeinander ab.

◇ Der mit dem Momentanpol zusammenfallende **körperfeste Punkt** hat zwar momentan keine Geschwindigkeit ($\vec{v}_P = \vec{0}$), erfährt im Allgemeinen aber eine Beschleunigung ($\vec{a}_P \neq \vec{0}$).

◇ Sind für zwei körperfeste Punkte die Geschwindigkeiten bekannt, so ergibt sich der Momentanpol als Schnittpunkt der dazu jeweils Senkrechten in diesen Punkten.

◇ Die Geschwindigkeiten zweier körperfester Punkte A und B verhalten sich zueinander wie die Polabstände: $v_A : v_B = \overline{PA} : \overline{PB}$.