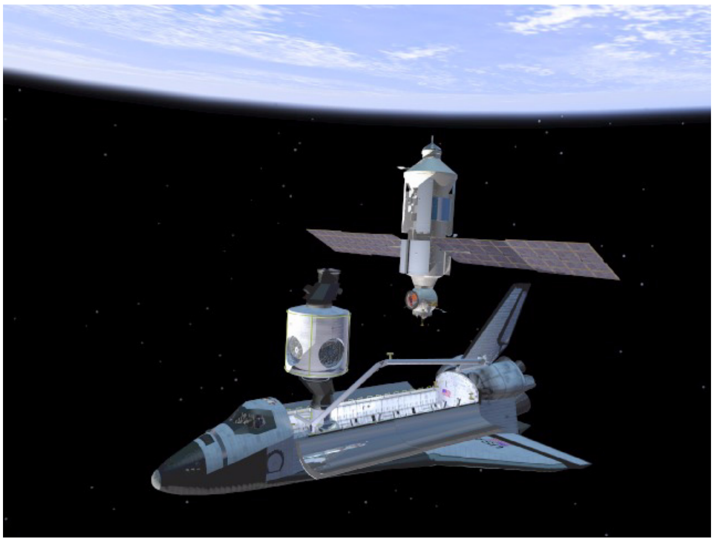
3 Räumliche Punktbewegung



Unserem 3-dimensionalen Raum entsprechend benötigt man drei Koordinaten zur eindeutigen Beschreibung der Lage eines Massenpunkts im Raum. Wählt man ein raumfestes Koordinatensystem und beschreibt den Punkt durch seine kartesischen Koordinaten, ergeben sich einfache Differentiationsregeln für die Geschwindigkeit und Beschleunigung, die koordinatenweise denen der geradlinigen Bewegung entsprechen.

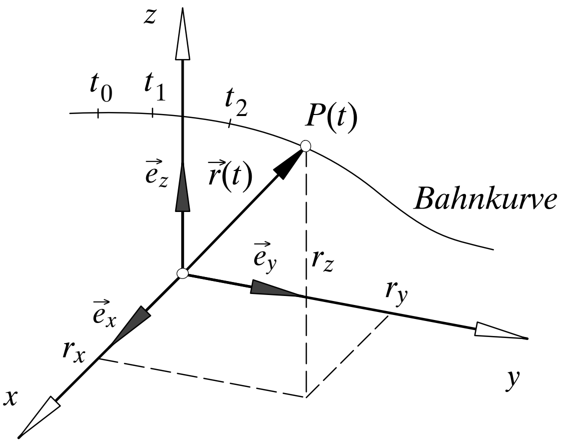
In der Robotik und Satellitendynamik können jedoch Beschreibungen durch Polar- oder Zylinderkoordinaten vorteilhafter sein. Eine solche Wahl entspricht dann allerdings einem bewegten Koordinatensystem, weshalb bei der Differentiation Zusatzterme aufgrund der zeitlichen Änderung der Koordinatenachsen entstehen.

Das 2. Newton'sche Axiom, oder kurz der Impulssatz, stellt einen Zusammenhang zwischen der resultierenden Kraft und der Beschleunigung des freien Massenpunkts her. In kartesischen Koordinaten ergibt sich eine besonders einfache Form des Impulssatzes, in Zylinderkoordinaten treten die bereits erwähnten Zusatzterme in den Beschleunigungen auf.

Eine Anwendung, bei der sich Zylinderkoordinaten als besonders günstig erweisen, ist die Berechnung von Planeten- und Satellitenbewegungen. In Abhängigkeit der Anfangsgeschwindigkeit ergeben sich die verschiedenen Kegelschnitte als mögliche Bahnen. Während Ellipsen und Kreise als Umlaufbahnen genutzt werden können, sind die Parabel als Grenzfall und die Hyperbel mögliche Fluchtbahnen aus dem Anziehungsfeld des Zentralkörpers.

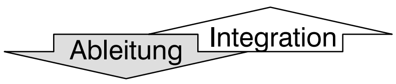
3.1 Beschreibung von Translationen

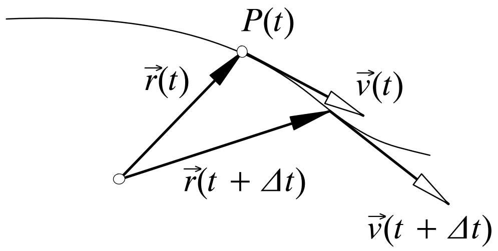
Vektorielle Betrachtung



Lagevektor

$$\vec{r} = r_x\,\vec{e}_x + r_y\,\vec{e}_y + r_z\,\vec{e}_z$$

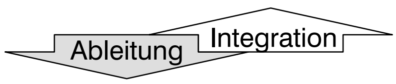


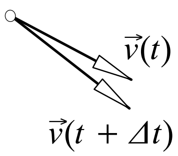


Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

$$= \dot{r}_x\,\vec{e}_x + \dot{r}_y\,\vec{e}_y + \dot{r}_z\,\vec{e}_z + r_x\,\dot{\vec{e}}_x + r_y\,\dot{\vec{e}}_y + r_z\,\dot{\vec{e}}_z$$



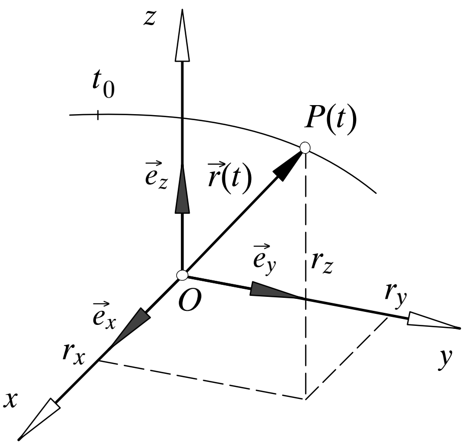


Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Verschiedene Koordinatensysteme

◇ raumfestes kartesisches Koordinatensystem $\{O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$



raumfest: $\dot{\vec{e}}_x = \dot{\vec{e}}_y = \dot{\vec{e}}_z = \vec{0}$

Lagevektor

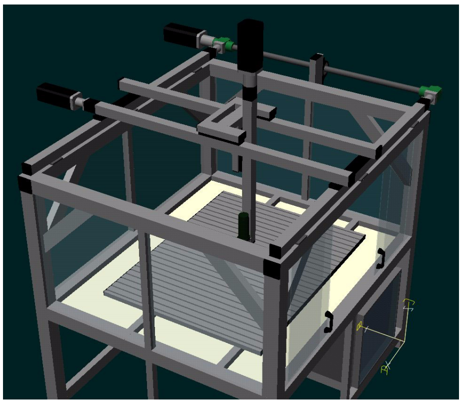
$$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}_x \vec{e}_x + \dot{r}_y \vec{e}_y + \dot{r}_z \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \dot{r}_x \\ \dot{r}_y \\ \dot{r}_z \end{bmatrix}$$

Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}_x \vec{e}_x + \ddot{r}_y \vec{e}_y + \ddot{r}_z \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{r}_z \end{bmatrix}$$

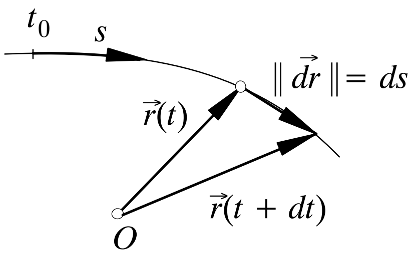


Beträge

$$r = \sqrt{\boldsymbol{r}^T \boldsymbol{r}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$$ Abstand $\overrightarrow{OP}$

$$v = \sqrt{\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$ Geschwindigkeit

$$a = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$ Beschleunigung

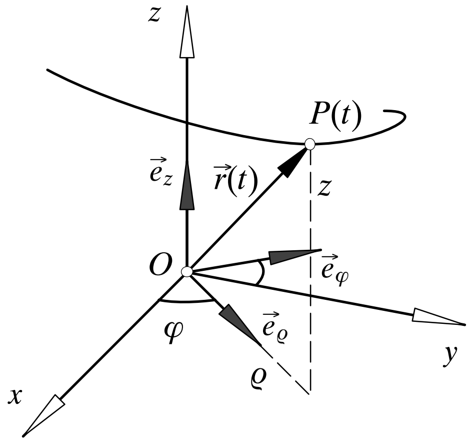


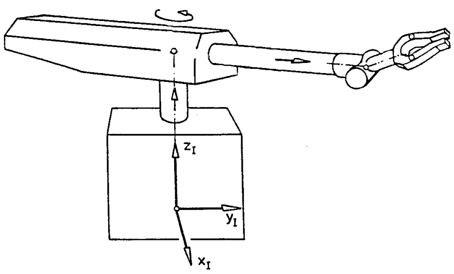
Weg des Punktes P

$$ds = \| d\vec{r} \| = \| \vec{v}\, dt \| = \| \vec{v} \|\ dt = v\, dt$$

$$\rightarrow \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad s = \int_{t_0}^{t} v\, d\bar{t}$$

◇ Zylinderkoordinatensystem $\left\{O,\ \vec{e}_\varrho\ ,\ \vec{e}_\varphi\ ,\ \vec{e}_z\right\}$





in raumfesten kartesischen Koordinaten gilt:

$$\boldsymbol{e}_\varrho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\varrho = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\boldsymbol{e}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{e}}_\varphi = \dot{\varphi} \begin{bmatrix} -\cos\varphi \\ -\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = -\dot{\varphi}\, \boldsymbol{e}_\varrho$$

$$\boldsymbol{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{e}}_z = \boldsymbol{0}$$

Lagevektor

$$\vec{r} = \varrho\, \vec{e}_\varrho + z\, \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \varrho \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$$

Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\varrho}\, \vec{e}_\varrho + \varrho\, \dot{\vec{e}}_\varrho + \dot{z}\, \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\varrho} \\ \varrho\dot{\varphi} \\ \dot{z} \end{bmatrix}$$

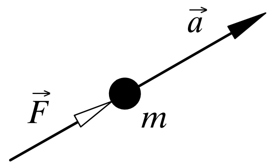
Beschleunigungsvektor

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\varrho}\, \vec{e}_\varrho + \dot{\varrho}\, \dot{\vec{e}}_\varrho + (\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi})\, \vec{e}_\varphi + \varrho\dot{\varphi}\, \dot{\vec{e}}_\varphi + \ddot{z}\, \vec{e}_z \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}$$

3.2 Impulssatz in verschiedenen Koordinatensystemen

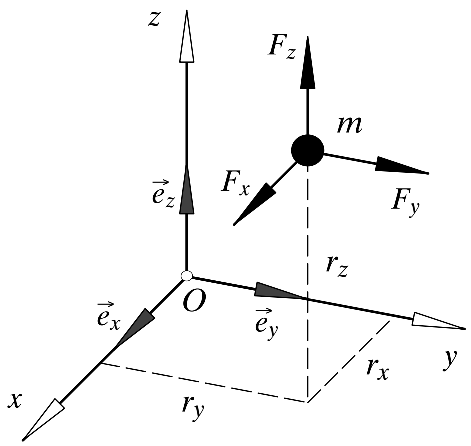
Vektorielle Betrachtung

$$m\,\vec{a} = \vec{F}$$



Darstellung im Koordinatensystem: $m\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}$

◇ raumfestes kartesisches Koordinatensystem

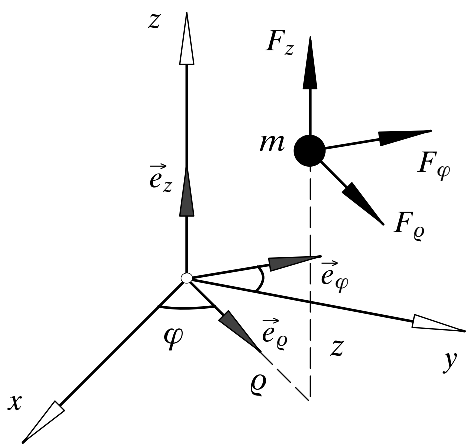


$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} = \begin{bmatrix} \ddot{r}_x \\ \ddot{r}_y \\ \ddot{r}_z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$m\,\ddot{r}_x = F_x$$
$$m\,\ddot{r}_y = F_y$$
$$m\,\ddot{r}_z = F_z$$

◇ Zylinderkoordinaten



$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2 \\ 2\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} F_\varrho \\ F_\varphi \\ F_z \end{bmatrix}$$

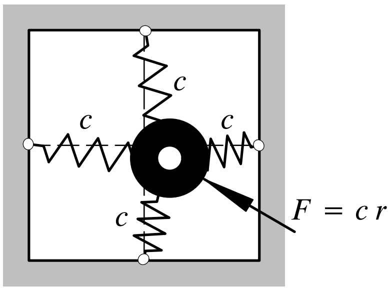
$$\Downarrow$$

$$m\left(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2\right) = F_\varrho$$
$$m(2\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi}) = F_\varphi$$
$$m\,\ddot{z} = F_z$$

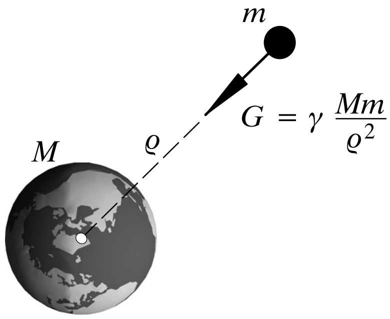
3.3 Bewegung in zentralen Kraftfeldern

Beispiele für zentrale Kraftfelder

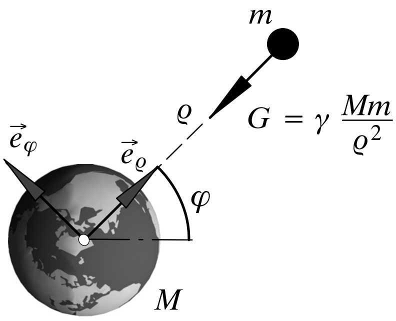
◇ isoelastische Lagerung einer Welle



◇ Gravitation



Satellitenbewegung



Impulssatz in Zylinderkoordinaten

$$m\left(\ddot{\varrho} - \varrho\dot{\varphi}^2\right) = -G = -\gamma\,\frac{Mm}{\varrho^2} \qquad (1)$$

$$m(2\dot{\varrho}\dot{\varphi} + \varrho\ddot{\varphi}) = 0 \qquad (2)$$

Lösung

Aus (2) erhält man nach Multiplikation mit ϱ

$$\underbrace{2\,\varrho\,\dot{\varrho}\,\dot{\varphi} + \varrho^2\,\ddot{\varphi}} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\varrho^2\,\dot{\varphi}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \varrho^2\,\dot{\varphi} = const. =: K \in \mathbb{R}$$

Aus (1) folgt mit

$$\dot{\varphi} = \frac{K}{\varrho^2}$$

$$\dot{\varrho} = \frac{d\varrho}{dt} = \frac{d\varrho}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = \frac{d\varrho}{d\varphi}\,\frac{K}{\varrho^2} = -K\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

$$\ddot{\varrho} = \frac{d\dot{\varrho}}{dt} = \frac{d\dot{\varrho}}{d\varphi}\,\dot{\varphi} = -K\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\,\frac{K}{\varrho^2} = -\frac{K^2}{\varrho^2}\,\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

die Differentialgleichung

$$\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{\varrho}\right) + \left(\frac{1}{\varrho}\right) = \frac{\gamma M}{K^2}$$

oder mit der Abkürzung $u := 1/\varrho$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\gamma M}{K^2}$$

Die allgemeine Lösung dieser linearen, inhomogenen Differentialgleichung lautet

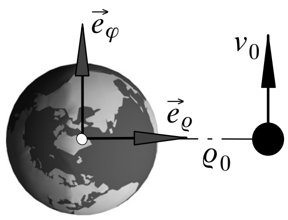
$$u \equiv \frac{1}{\varrho} = C\,\cos\left(\varphi - \varphi_0\right) + \frac{\gamma M}{K^2}\,, \quad C,\,\varphi_0 \in \mathbb{R}$$

Beweis durch Ableiten und Einsetzen:

$$\frac{du}{d\varphi} = -\,C\,\sin\left(\varphi - \varphi_0\right)$$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -\,C\,\cos\left(\varphi - \varphi_0\right) \equiv \frac{\gamma M}{K^2} - u \quad ✓$$

Die freien Konstanten $K,\,C,\,\varphi_0 \in \mathbb{R}$ ergeben sich aus den Anfangsbedingungen der Satellitenbewegung, d.h. Anfangslage und Anfangsgeschwindigkeit. Im Falle eines tangentialen Abschusses lauten die



<u>*Anfangsbedingungen für $\varphi = 0$*</u>

$$\boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix}\varrho\\0\\z\end{bmatrix}_{t_0} \overset{!}{=} \begin{bmatrix}\varrho_0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varrho(\varphi = 0) = \varrho_0 \qquad \text{(a)}$$

$$\boldsymbol{v}_0 = \begin{bmatrix}\dot\varrho\\\varrho\dot\varphi\\\dot z\end{bmatrix}_{t_0} \overset{!}{=} \begin{bmatrix}0\\v_0\\0\end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}&\dot\varrho_0 = 0 && \text{(b)}\\ &\varrho_0\dot\varphi_0 \equiv \frac{\varrho_0^2\dot\varphi_0}{\varrho_0} = \frac{K}{\varrho_0} = v_0 && \text{(c)}\end{aligned}$$

aus (c) folgt $\quad K = \varrho_0\,v_0$

aus (b) folgt mit

$$\dot\varrho = -\,K\,\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\varrho}\right) \equiv -\,K\,\frac{du}{d\varphi} = KC\,\sin\left(\varphi - \varphi_0\right)$$

die Forderung

$$\dot\varrho_0 = \dot\varrho(\varphi = 0) = KC\,\sin\left(-\,\varphi_0\right) \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_0 = 0$$

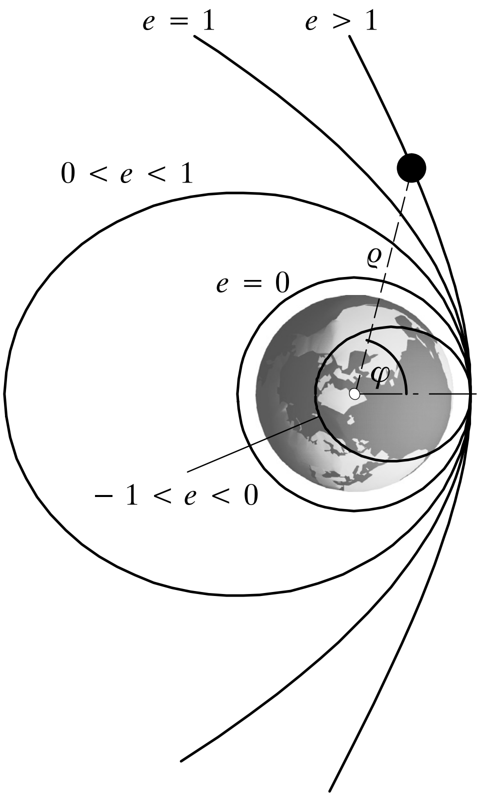
aus (a) folgt $\quad \dfrac{1}{\varrho_0} = \dfrac{1}{\varrho(\varphi = 0)} \equiv u(0) = C + \dfrac{\gamma M}{K^2}$

$$\Rightarrow \quad C = \frac{1}{\varrho_0} - \frac{\gamma M}{\varrho_0^2 v_0^2}$$

Damit lautet die Lösung

$$u(\varphi) = \frac{\gamma M}{\varrho_0^2 v_0^2}\left[\left(\frac{\varrho_0 v_0^2}{\gamma M} - 1\right)\cos\varphi + 1\right]$$

$\varrho = 1/u$



Die zugehörige Lösung für den Abstand des Satelliten vom Erdmittelpunkt

$$\varrho(\varphi) = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad e = \frac{\varrho_0 v_0^2}{\gamma M} - 1, \quad p = \frac{\varrho_0^2 v_0^2}{\gamma M}$$

ist die Polardarstellung der Kegelschnitte mit folgender Interpretation der Satellitenbahn in Abhängigkeit der numerischen Exzentrizität e:

$-1 < e < 0$	Ellipse mit Erde im Brennpunkt, Abschuss im Apogäum (erdfernster Punkt)
$e = 0$	Kreis
$0 < e < 1$	Ellipse mit Erde im Brennpunkt, Abschuss im Perigäum (erdnächster Punkt)
$e = 1$	Parabel
$1 < e$	Hyperbel

Satellitenbahnen bei erdnahem Abschuss

$$\varrho_0 \approx R = 6370\,\mathrm{km}, \quad \frac{\gamma M}{R^2} = g = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{s^2}$$

$$\Downarrow$$

$$e = \frac{v_0^2}{gR} - 1 \quad \text{oder} \quad v_0 = \sqrt{(1 + e)\,gR}$$

Erste astronautische Geschwindigkeit (Minimalgeschwindigkeit für Umlaufbahn):

$$e = 0 \to v_U = \sqrt{gR} \approx 7900\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Zweite astronautische Geschwindigkeit (Flucht aus Anziehungsfeld):

$$e = 1 \to v_F = \sqrt{2gR} \approx 11200\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$