2 Geradlinige Bewegung eines Massenpunkts

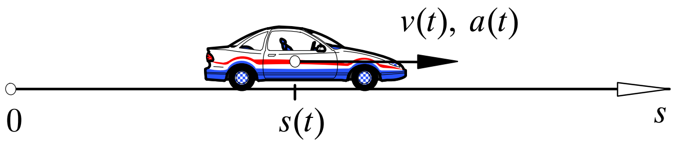
Bei vielen Bewegungsaufgaben kann die Drehbewegung eines Körpers vernachlässigt werden, wenn nur dessen translatorische Bewegung interessiert. In diesem Fall darf der Körper als Massenpunkt betrachtet werden, der sich entlang einer vorgegebenen Linie bewegt. Ist die Linie eine Gerade, spricht man von geradliniger Bewegung. Das im Folgenden entwickelte Vorgehen ist jedoch auf beliebige eindimensionale Translationen sowie reine Drehbewegungen um feststehende Achsen übertragbar.

Der Ort eines bewegten Massenpunkts auf einer Linie lässt sich durch eine einzelne Lagekoordinate beschreiben. Deren zeitliche Änderung entspricht seiner Momentangeschwindigkeit, die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit seiner Beschleunigung. Für eine geschlossene Beschreibung unstetiger Zeitverläufe kann das aus der Balkenstatik bekannte Föppl-Symbol herangezogen werden.

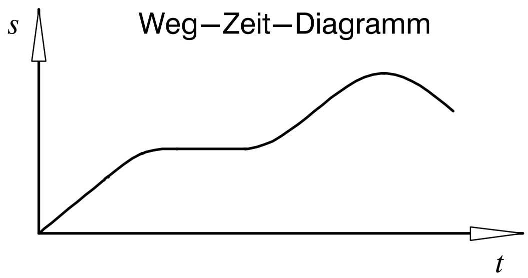
Im Allgemeinen ergibt sich die Beschleunigung eines Massenpunkts mit Hilfe des Newton'schen Axioms aus den auf ihn wirkenden Kräften in Wegrichtung. Bei gesteuerten Bewegungen z.B. von Werkzeugmaschinen oder Fördereinrichtungen kann das Beschleunigungs- oder Geschwindigkeitsprofil jedoch auch als Weg- oder Zeitfunktion vorgegeben sein. Allgemein wird eine Bewegungsaufgabe durch vier Variablen beschrieben: Zeit, Lage, Geschwindigkeit und Beschleunigung. Dabei kann eine der Größen als unabhängige Variable gewählt, eine weitere als Funktion der unabhängigen Variablen vorgeschrieben werden. Die beiden restlichen Größen sind durch die differentiellen Zusammenhänge zwischen Lage und Geschwindigkeit einerseits sowie Geschwindigkeit und Beschleunigung andererseits eindeutig festgelegt, und können daraus berechnet werden.

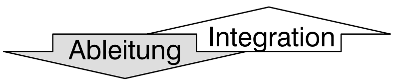
2.1 Kinematische Größen

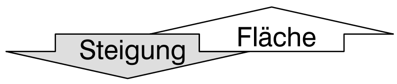
<u>Definitionen</u>



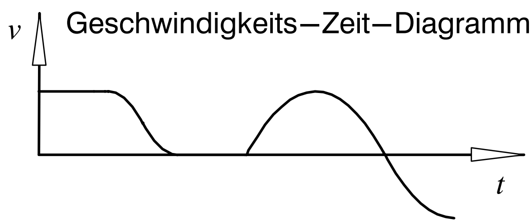
Lage: $s = s(t)$

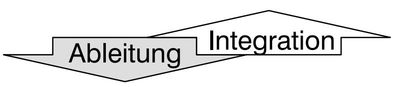


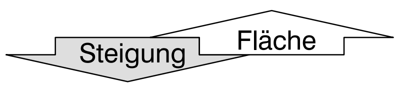




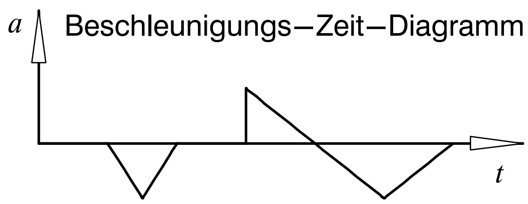
Geschwindigkeit: $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt} = \dot{s}$







Beschleunigung: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{s}$

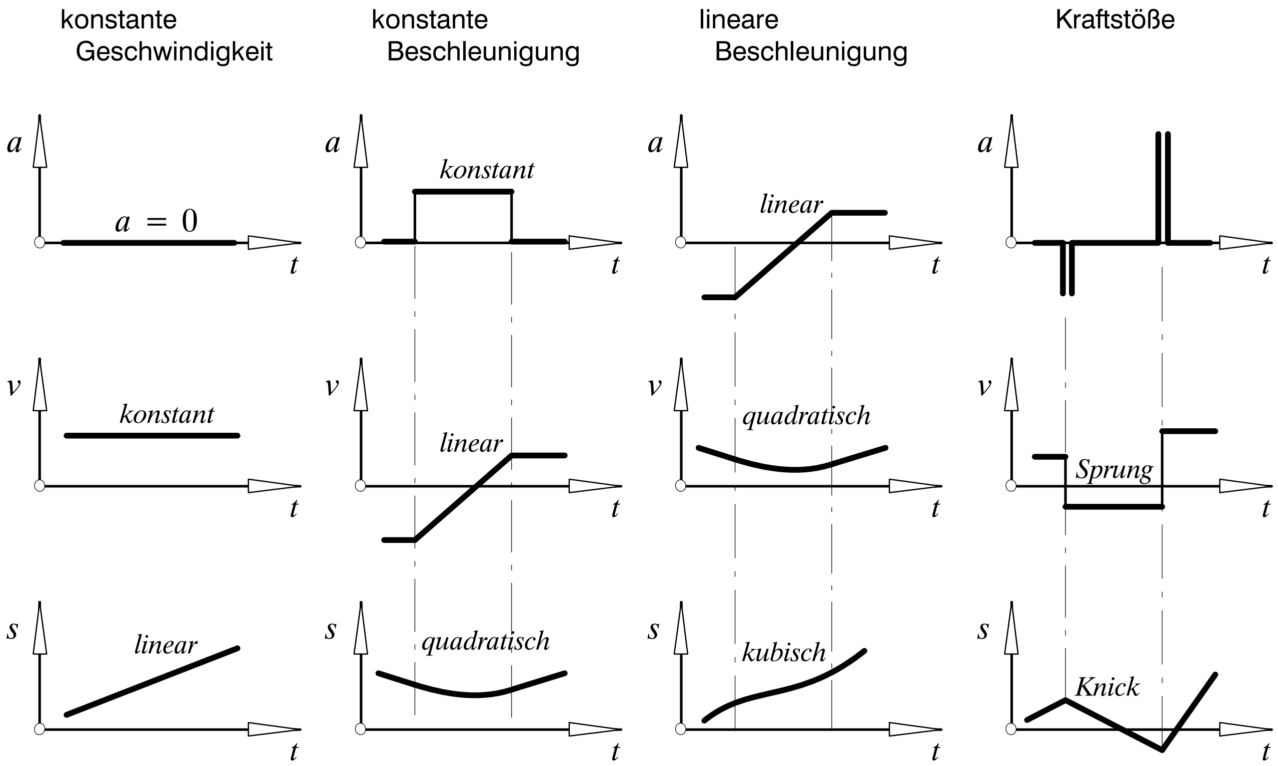


Beziehungen zwischen den Diagrammen

$$v(t) = \frac{ds}{dt}\,, \qquad a(t) = \frac{dv}{dt}$$

$a(t)$	>0			0			<0		
$v(t)$	*steigend*			*konstant*			*fallend*		
	<0	0	>0	<0	0	>0	<0	0	>0
$s(t)$	*Linkskurve*			*Gerade*			*Rechtskurve*		
	fallend	*waage-rechte Tangente*	*steigend*	*fallend*	*waage-recht*	*steigend*	*fallend*	*waage-rechte Tangente*	*steigend*

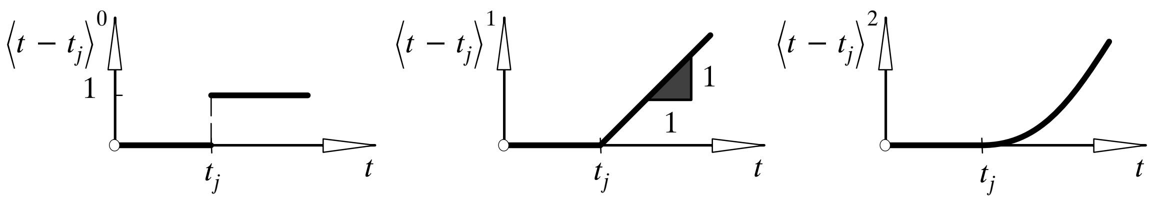
Typische Verläufe



Beschreibung unstetiger Zeitverläufe

Zur Beschreibung nur abschnittsweise stetiger Funktionen eignet sich das Föppl–Symbol:

$$\left\langle t - t_j \right\rangle^n = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad t < t_j \\ \left(t - t_j\right)^n & \textit{für} \quad t \geq t_j \end{cases}$$



Die Regeln für Differentiation und Integration entsprechen den üblichen Funktionen:

$$\frac{d}{dt}\left\langle t - t_j \right\rangle^n = n \left\langle t - t_j \right\rangle^{n-1} \quad \text{für} \quad n \geq 1 \, ,$$

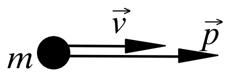
$$\int_0^t \left\langle \tau - t_j \right\rangle^n d\tau = \frac{1}{n+1} \left\langle t - t_j \right\rangle^{n+1} \, .$$

2.2 Kinetik des Massenpunkts

Definitionen

Massenpunkt: Größe des betrachteten Körpers vernachlässigbar gegen Bahnbewegung (auch Punktmasse, materieller Punkt)

Impuls: $\vec{p}(t) = m\,\vec{v}(t)$



$m = const.$

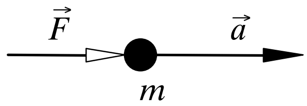
Impulsänderung: $\dot{\vec{p}} = m\,\dot{\vec{v}} = m\,\vec{a}$

2. Newton'sche Grundgesetz (Impulssatz, Principia 1687)

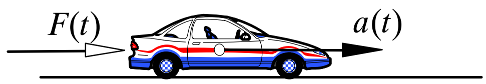
> *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*
>
> *(Die Änderung der Bewegungsgröße ist der Einwirkung der bewegenden Kraft proportional und erfolgt in der Richtung, in der diese Kraft wirkt.)*

heutige Interpretation: $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$

oder $m\,\vec{a} = \vec{F}$



geradlinige Bewegung: $m\,a(t) = F(t)$



direktes Problem der Dynamik: $F(t)$ *gegeben* $\rightarrow$ $a(t) = \dfrac{F(t)}{m}$

inverses Problem der Dynamik: $a(t)$ *gegeben* $\rightarrow$ $F(t) = m\,a(t)$

2.3 Berechnung von Bewegungsabläufen

Grundaufgaben

	unabh. Variable	geg. Fkt.	gesuchte Funktionen
1		$s(t)$	$v(t) = \dfrac{ds}{dt} \quad \rightarrow \quad a(t) = \dfrac{dv}{dt}$
2	t	$v(t)$	$s(t) = s_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\, d\bar{t} \qquad a(t) = \dfrac{dv}{dt}$
3		$a(t)$	$v(t) = v_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} a(\bar{t})\, d\bar{t} \quad \rightarrow \quad s(t) = s_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} v(\bar{t})\, d\bar{t}$
4		$v(s)$	$a(s) = v\,\dfrac{dv}{ds} \qquad t(s) = t_0 + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \dfrac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$
5	s	$a(s)$	$v(s) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\displaystyle\int_{s_0}^{s} a(\bar{s})\, d\bar{s}} \quad \rightarrow \quad t(s) = t_0 + \displaystyle\int_{s_0}^{s} \dfrac{d\bar{s}}{v(\bar{s})}$
6		$t(s)$	$v(s) = \dfrac{1}{dt/ds} \quad \rightarrow \quad a(s) = v\,\dfrac{dv}{ds}$
7		$s(v)$	$a(v) = \dfrac{v}{ds/dv} \quad \rightarrow \quad t(v) = t_0 + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \dfrac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$
8	v	$a(v)$	$s(v) = s_0 + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \dfrac{\bar{v}\, d\bar{v}}{a(\bar{v})} \qquad t(v) = t_0 + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \dfrac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$
9		$t(v)$	$a(v) = \dfrac{1}{dt/dv} \quad \rightarrow \quad s(v) = s_0 + \displaystyle\int_{v_0}^{v} \dfrac{\bar{v}\, d\bar{v}}{a(\bar{v})}$