1 Einleitung und Grundlagen

Die Technische Mechanik I befasste sich im Wesentlichen mit Fragen der Statik, d.h. der Lösung von Gleichgewichtsaufgaben. Viele technische Vorgänge sind aber nicht statisch und können nur durch zeitveränderliche Größen beschrieben und verstanden werden. Die Technische Mechanik II behandelt daher dynamische Probleme und Schwingungen.

Das grundsätzliche Vorgehen in der Statik lässt sich auf die Dynamik übertragen und erweitern. Bei der Modellbildung wird das betrachtete technische System zunächst in Gleichungen überführt. Betrachtet man nur die Bewegung der Maschinenteile relativ zueinander und vernachlässigt deren kleine Verformungen, kann man sich auf Methoden der Stereomechanik beschränken. Die Gleichgewichtsbedingungen der Statik werden dabei durch die Axiome der Kinetik, den Impuls- und Drallsatz, ersetzt. Zuvor muss allerdings die Bewegung mit den Hilfsmitteln der Kinematik beschrieben werden.

Als Ergebnis der Modellbildung erhält man Bewegungsgleichungen in Form von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Im Allgemeinen können diese nur numerisch gelöst werden und bilden die Grundlage des sogenannten Virtual Prototyping. Für bestimmte Problemstellungen wie Stoßaufgaben oder Energiemethoden ist die Integration jedoch allgemein durchführbar und vereinfacht die Modellgleichungen. Auch für lineare Differentialgleichungen kann die Lösung geschlossen analytisch angegeben werden.

Wegen des analogen Vorgehens sind die in der Technischen Mechanik I entwickelten Grundbegriffe und Lösungsstrategien auch Grundlage der Technischen Mechanik II, z.B. Kraft, Moment, Kräftesystem, Kraftwinder, Bindung, Freischneiden, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt sowie Haft- und Gleitreibung. Dazu kommen geschwindigkeitsabhängige Elemente wie Dämpfer und Luftwiderstand.

Als mathematische Hilfsmittel werden zusätzlich zu der bereits in der Statik benutzten Vektoralgebra die Methoden der Differential- und Integralrechnung benötigt. Diese lassen sich auf vektorielle und tensorielle Größen durch komponentenweise Anwendung erweitern. Neben den Vektoren spielen die Tensoren zur Beschreibung von Drehbewegungen und Trägheitseigenschaften von Körpern im Raum eine große Rolle. Ihre Koordinatendarstellung führt auf eine 3×3–Matrix, die den üblichen Rechenregeln der Matrizenalgebra gehorcht.

1.1 Einordnung der Vorlesung

Einteilung der Technischen Mechanik nach Materialeigenschaften

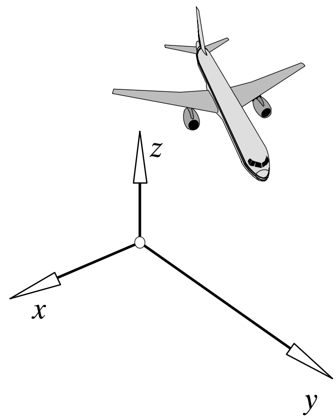
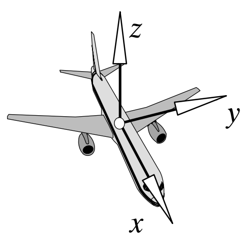
- **Mechanik**
  - **Stereomechanik**
  - **Kontinuumsmechanik**
    - **Elastomechanik**
    - **Plastomechanik**
    - **Fluidmechanik**

Einteilung der Technischen Mechanik nach physikalischen Vorgängen (Kirchhoff)

- **Mechanik**
  - **Kinematik**
  - **Dynamik**
    - **Statik**
    - **Kinetik**

1.2 Stereomechanik: Wiederholung und Ausblick

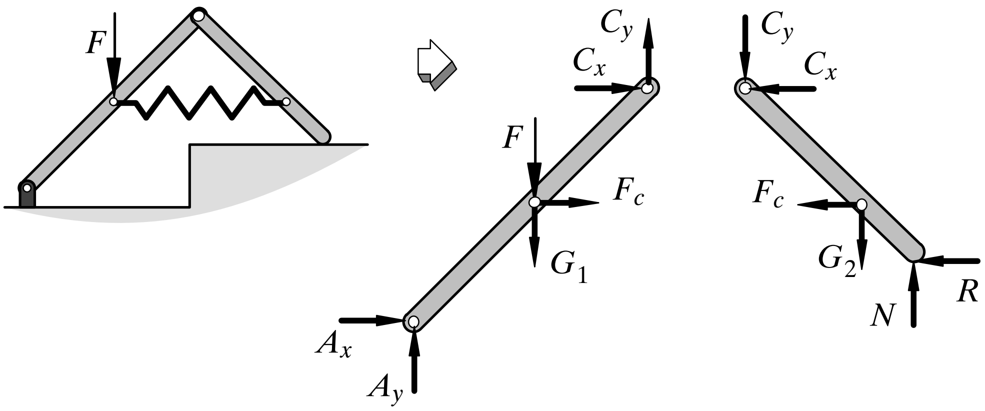
<u>Mechanische Größen</u>

Größe	Geometrische Darstellung (unabhängig vom Koordinatensystem)	Koordinatendarstellung (abhängig vom Koordinatensystem)
Skalar	einzelne Größe gekennzeichnet durch Zahl und Einheit *Bsp: Zeit, Masse, Energie, Leistung,...* *Notation: Klein− und Großbuchstaben* 	
Vektor	gekennzeichnet durch Betrag und Richtung *Bsp: Lage, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Moment, Impuls, Drall,...* 	3 Elemente *Notation: unterstrichene (oder fette) Klein− und Großbuchstaben* 
Tensor	vermittelt lineare Abbildung zwischen zwei Vektoren *Bsp: Trägheitstensor, Drehtensor,...* 	9 Elemente *Notation: doppelt unterstrichene (oder fette) Großbuchstaben* 

Kräfte und Momente

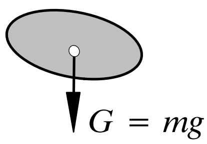
Eigenschaften: Kraft ↔ linienflüchtiger Vektor, Einheit $1\,[\mathrm{N}] = [\mathrm{kg\ m/s^2}]$
Moment ↔ freier Vektor, Einheit $[\mathrm{Nm}]$

Freischneiden: Freistellen von Körpern oder Teilsystemen, Ersetzen der entfernten Elemente durch äqivalente Schnittkräfte und -momente

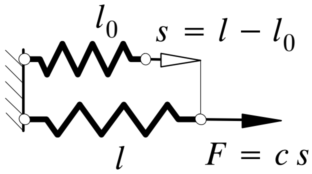


Unterscheidung: eingeprägte Kräfte/Momente ↔ physikalisches Gesetz

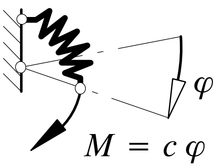
- Gewicht



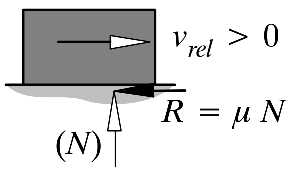
- Feder



- Drehfeder

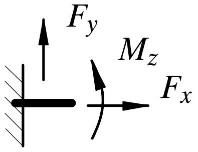


- Gleitreibung

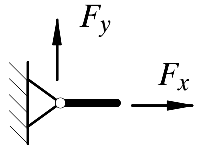


Reaktionskräfte ↔ Bindungskräfte

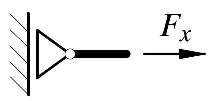
- feste Einspannung



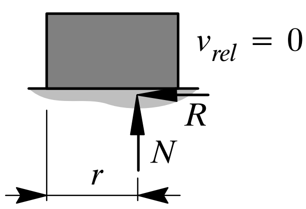
- Gelenklager



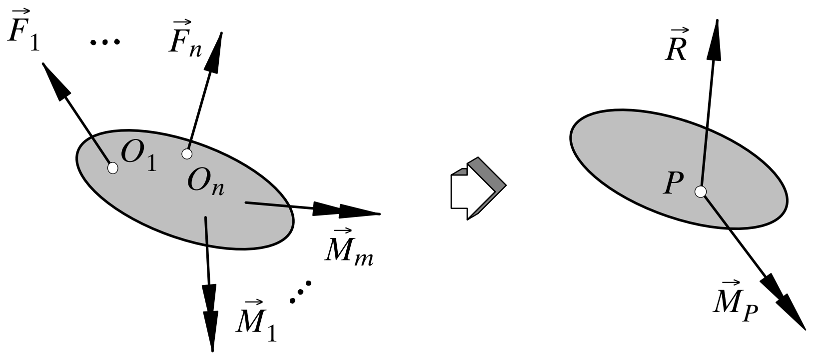
- Loslager



- Haftreibung



Kräftesystem:



allgemeines Kräftesystem $\sim$ äquivalenter Kraftwinder $\left\{\vec{R},\, \vec{M}_P\right\}$

mit $\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$

$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{PO_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j$$

Gleichgewichtsbedingungen

Kräftegleichgewicht: $\vec{R} = \vec{0}$

Momentengleichgewicht: $\vec{M}_P = \vec{0}$

Mittelpunkte

Schwerpunkt und Massenmittelpunkt fallen bei terrestrischen Problemen zusammen:

$$m = \int_B dm \,, \quad \vec{r}_{OC} = \frac{1}{m} \int_B \vec{r}\, dm$$

zusammengesetzte Körper:

$$m = \sum m_i \,, \quad \vec{r}_{OC} = \frac{1}{m} \sum \vec{r}_{OC_i}\, m_i$$

1.3 Mathematische Hilfsmittel

Differentiation

Ableitung:

$$\dot{f} = \frac{d}{dt} f(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$\ddot{f} = \frac{d}{dt} \dot{f}(t)$$

Regeln

Linearität:

$$\frac{d}{dt}(f \pm g) = \dot{f} \pm \dot{g}\ , \quad \frac{d}{dt}\big(cf(t)\big) = c\dot{f}\,,\ \ c = const.$$

Produkt

$$\frac{d}{dt}(fg) = \dot{f}g + f\dot{g}$$

Quotient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\dot{f}g - f\dot{g}}{g^2}$$

Verkettung

$$\frac{d}{dt} f\big(g(t)\big) = \left.\frac{\partial f}{\partial g}\right|_{g(t)} \dot{g}(t) = f'\big(g(t)\big)\,\dot{g}(t)$$

Integration

Stammfunktion: $F(t)$ ist Stammfunktion von $f(t)$, wenn $\dot{F}(t) = f(t)$

unbestimmtes Integral:

$$\int f(t)\,dt = F(t) + c\ ,\ \ c = const.$$

Bereichsintegration:

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

Regeln

Bereich

$$\int_a^b f\,dt = -\int_b^a f\,dt\ , \quad \int_a^b f\,dt + \int_b^c f\,dt = \int_a^c f\,dt$$

Linearität

$$\int_a^b (f \pm g)\,dt = \int_a^b f\,dt \pm \int_a^b g\,dt$$

$$\int_a^b c\,f\,dt = c\int_a^b f\,dt\ ,\ \ c = const.$$

Produkt

$$\int_a^b \dot{f}g\,dt = (fg)\Big|_a^b - \int_a^b f\dot{g}\,dt$$

Substitution

$$\int_a^b \Big[f\big(g(t)\big)\,\dot{g}(t)\Big]\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Vektoralgebra

Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$: $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \dots x_n \end{bmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{R} ,$$

Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$: $$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R} .$$

Elementare Operationen

Operation	Schreibweise	Komponenten	Abbildung
Addition	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n}$
Multiplikation mit Skalar	$\boldsymbol{C} = \mu \boldsymbol{A}$	$c_{ij} = \mu\, a_{ij}$	$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n}$
Transponieren	$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^T$	$c_{ij} = a_{ji}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{n \times m}$
Differentiation	$\boldsymbol{C} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{A}$	$c_{ij} = \frac{d}{dt}a_{ij}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n}$
Matrizenmultiplikation	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$	$y_i = \sum_k a_{ik} x_k$ $c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$	$\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{m}$ $\mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{n \times p} \to \mathbb{R}^{m \times p}$
Inneres Produkt (Skalarprodukt)	$\alpha = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$	$\alpha = \sum_k x_k y_k$	$\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}$
Äußeres Produkt (Dyadisches Produkt)	$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{y}^T$	$a_{ij} = x_i y_j$	$\mathbb{R}^{m} \times \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{m \times n}$

Regeln

Addition: $A + (B + C) = (A + B) + C$

$A + B = B + A$

Multiplikation mit Skalar: $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$

Transposition: $(A^T)^T = A$

$(A + B)^T = A^T + B^T$

$(\alpha A)^T = \alpha A^T$

$(AB)^T = B^T A^T$

Differentiation: $\frac{d}{dt}(A + B) = \frac{d}{dt}A + \frac{d}{dt}B$

$\frac{d}{dt}(AB) = \left(\frac{d}{dt}A\right)B + A\left(\frac{d}{dt}B\right)$

Matrizenmultiplikation: $A(B + C) = AB + AC$

$A(BC) = (AB)C$

$AB \neq BA \quad i.\ allg.$

Skalarprodukt: $x^T y = y^T x$

$x^T x \geq 0 \ \forall x \ , \qquad x^T x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$x^T y = 0 \Leftrightarrow x, y \ \ orthogonal$

Quadratische Matrizen

Einheitsmatrix $$E = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse Matrix $A^{-1} A = A A^{-1} = E$

Orthogonale Matrix $A^{-1} = A^T, \quad A^T A = A A^T = E$

Symmetrische Matrix $A = A^T$

Schiefsymmetrische Matrix $A = -A^T$

speziell: 3×3 Matrix $$\tilde{a} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \xleftrightarrow{\text{Rösselsprung}} \quad a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

$\tilde{a}\, b \ \hat{=}\ \vec{a} \times \vec{b}$

$\tilde{a}\, b = -\tilde{b}\, a$

$\tilde{a}\, \tilde{b} = b\, a^T - (a^T b)\, E$

$\widetilde{(\tilde{a}\, b)} = b\, a^T - a\, b^T$