



Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

D. Bestle

Technische Mechanik II

Dynamik

Arbeitsunterlagen zur Vorlesung



Lehrstuhl
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle

Kinematik

Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad v = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$

Beschleunigung $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{\mathbf{r}}, \quad a = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$

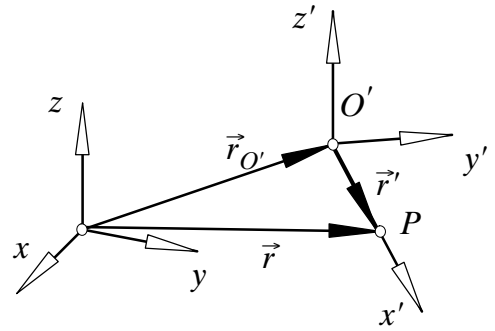
Koordinatentransformation

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{x'K} & \mathbf{e}_{y'K} & \mathbf{e}_{z'K} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} \mathbf{S}^T = \mathbf{E}$$

$\mathbf{r}'_{K'} : \vec{r}'$ dargestellt in K'

$\mathbf{r}'_K = \mathbf{S} \mathbf{r}'_{K'} : \vec{r}'$ dargestellt in K

$$\mathbf{S}_{ges} = \prod_i \mathbf{S}_i, \quad \boldsymbol{\omega}_{ges} = \sum_i \boldsymbol{\omega}_i$$

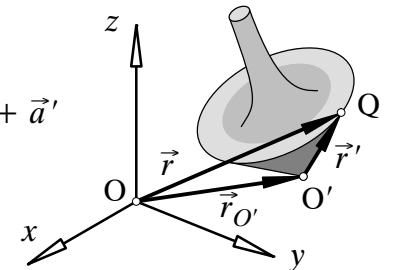


Relativkinematik $\frac{d}{dt} \vec{A} = \frac{d'}{dt} \vec{A} + \vec{\omega} \times \vec{A}$

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{v}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + 2 \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}'$$



Starrkörperkinematik

allgemein:

$$\vec{r} = \vec{r}_{O'} + \vec{r}'$$

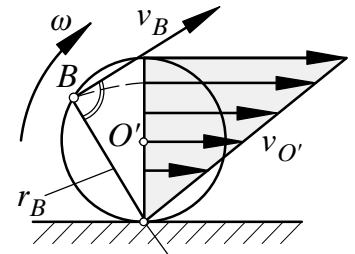
$$\vec{v} = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

$$\vec{a} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

eben:

$$v_B = \omega r_B$$

$$\text{Momentanpol } \vec{r}_{O'P} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v}_{O'}}{\omega^2}$$



Kinetik

Impuls

$$\vec{p} = \int_K \vec{v} dm$$

starrer Körper



$$\mathbf{p} = m \mathbf{v}_C$$

Drall

$$\vec{L}_O = \int_K \vec{r} \times d\vec{p}$$

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_C + m \vec{r}_C \times \mathbf{v}_C \quad \text{mit } \mathbf{L}_C = \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}$$

Impulssatz

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

starrer Körper



$$m \mathbf{a}_C = \mathbf{F}$$

Drallsatz

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

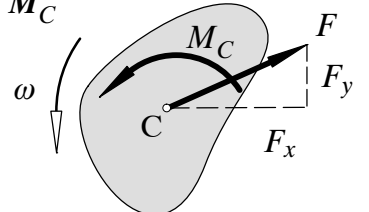
$$\mathbf{I}_C \dot{\boldsymbol{\omega}} + \vec{\omega} \times \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_C$$

eben:

$$m a_{Cx} = F_x$$

$$m a_{Cy} = F_y$$

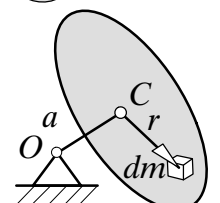
$$\mathbf{I}_C \dot{\omega} = M_C$$



Trägheitstensor

$$\mathbf{I}_{OK'} = - \int_K \vec{r}'_{K'} \vec{r}'_{K'} dm$$

eben: $\mathbf{I}_C = \int_K r^2 dm, \quad \mathbf{I}_O = \mathbf{I}_C + m a^2$



Stöße in Mehrkörpersystemen

Impulsbilanz $mv_C^+ = mv_C^- + \sum \Delta p_i$, $\Delta p_i = \int_{t^-}^{t^+} F_i dt$

Drallbilanz $I_C \omega^+ = I_C \omega^- + \sum (\tilde{r}'_i \Delta p_i + \Delta L_j)$, $\Delta L_j = \int_{t^-}^{t^+} M_j dt$

Werkstoffpaarung $\Delta v_P^+ = -\varepsilon \Delta v_P^-$, $\varepsilon = 0$ plastischer Stoß
(Kontaktpunkt P) $\varepsilon = 1$ elastischer Stoß

Schwingungen

nichtlinear $\ddot{x} + f(x, \dot{x}, t) = 0$

linear $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = f(t)$

- homogene Lösung (freie Schwingung, $f(t) = 0$)

ungedämpft ($\delta = 0$): Periode $T = 2\pi/\omega_0$, Frequenz $f = 1/T$

schwach gedämpft ($\delta^2 < \omega_0^2$): Kreisfrequenz $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$

Periode $T = 2\pi/\omega$

logarithmisches Dekrement $\vartheta = \delta T = \ln x_n/x_{n+1}$

Lehr'sches Dämpfungsmaß $D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{\vartheta}{\sqrt{\vartheta^2 + 4\pi^2}}$

- partikuläre Lösung (erzwungene Schwingung)

Sprungerregung $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ f_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

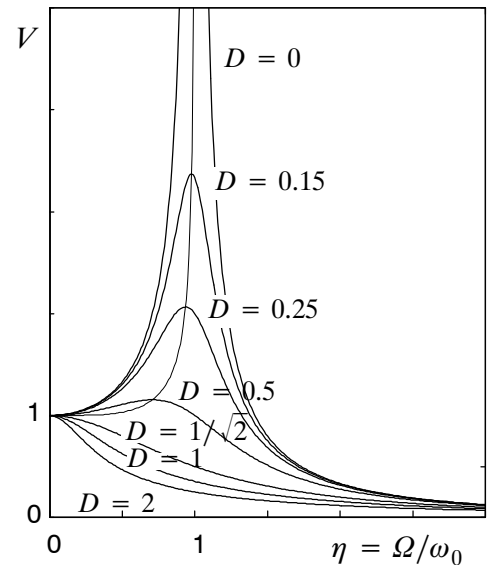
$\Rightarrow x = x_G := f_0/\omega_0^2$

harmonische Erregung $f(t) = f_0 \cos \Omega t$

$\Rightarrow x = r_0 \cos(\Omega t - \psi)$

$r_0 = \frac{f_0}{\omega_0^2} V(\eta, D)$

$\psi(\eta, D) = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$



Energiemethoden

kinetische Energie: Massenpunkt $T = \frac{1}{2}mv^2$

starrer Körper $T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_C^T \mathbf{v}_C + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}$

potentielle Energie: Feder $U = \frac{cs^2}{2}$

Gewichtskraft $U = mgz$

allgemein $\text{grad } U = -\mathbf{F}$

Arbeit: $W_{12} = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^T d\mathbf{r}_i + \sum_j \int_1^2 \mathbf{M}_j^T d\boldsymbol{\varphi}_j$

Leistung: $P = dW/dt$

Wirkungsgrad: $\eta = P_{\text{Nutz}}/P_{\text{Zufuhr}}$, $\eta = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$

Energiebilanz: abgeschlossenes System: $T_2 - T_1 = W_{12}$
konservatives System: $E = T_1 + U_1 = T_2 + U_2 = \text{const.}$

Inhalt

Inhalt	1
Literatur	3
1 Einleitung und Grundlagen	5
1.1 Einordnung der Vorlesung	6
1.2 Stereomechanik: Wiederholung und Ausblick	7
1.3 Mathematische Hilfsmittel	10
2 Geradlinige Bewegung eines Massenpunkts	13
2.1 Kinematische Größen	14
2.2 Kinetik des Massenpunkts	17
2.3 Berechnung von Bewegungsabläufen	18
3 Räumliche Punktbewegung	19
3.1 Beschreibung von Translationen	20
3.2 Impulssatz in verschiedenen Koordinatensystemen	23
3.3 Bewegung in zentralen Kraftfeldern	24
4 Relativbewegung eines Massenpunkts	27
4.1 Koordinatentransformation	28
4.2 Relativkinematik	30
4.3 Relativkinetik	33
5 Kinematik der Starrkörperbewegung	35
5.1 Beschreibung von Drehbewegungen	36
5.2 Allgemeine Bewegung eines starren Körpers	39
5.3 Ebene Bewegung	41
6 Kinetik der Starrkörperdrehung	43
6.1 Drall eines Starrkörpers	44
6.2 Drallsatz	45
6.3 Trägheitstensor	46
7 Kreiselphänomene	49
7.1 Kraftwirkung von Rotoren	50
7.2 Nutation	52
7.3 Präzession	55
8 Kinetik der allgemeinen Starrkörperbewegung	57
8.1 Impuls und Drall eines Starrkörpers	58
8.2 Impuls- und Drallsatz	60
8.3 Kinetik der ebenen Bewegung	62

9 Mehrkörpersysteme	63
9.1 Bindungen	64
9.2 Impuls- und Drallsatz	66
9.3 Bewegungsgleichungen	67
10 Kinetik allgemeiner Systeme	69
10.1 Impuls- und Drallsatz für abgeschlossene Systeme	70
10.2 Impuls- und Drallbilanz für abgeschlossene Systeme	72
10.3 Impulssatz für nichtabgeschlossene Systeme	73
11 Energiemethoden	75
11.1 Kinetische Energie	76
11.2 Arbeit, Leistung und potentielle Energie	77
11.3 Energiebilanz	79
12 Stoßprobleme	81
12.1 Stoßarten	82
12.2 Grundgleichungen	83
12.3 Stoßbeispiele	85
13 Schwingungen	87
13.1 Charakterisierung von Schwingungen	88
13.2 Nichtlineare Pendelschwingungen	90
13.3 Gleichgewichtslagen und Linearisierung	92
14 Freie Schwingungen	93
14.1 Lineare Schwingungsgleichung	94
14.2 Ungedämpfte Schwingungen	95
14.3 Gedämpfte Schwingungen	97
15 Erzwungene Schwingungen	101
15.1 Allgemeine Lösung	102
15.2 Sprungerregung	103
15.3 Harmonische Erregung	104
Sachwortverzeichnis	109

Literatur

1. F.P. Beer and E.R. Johnston: *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*. Boston: McGraw Hill, 1997.
2. *DUBBEL: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, 2005.
3. U. Gamer und W. Mack: *Mechanik*. Wien: Springer, 1999.
4. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 3 – Dynamik*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.
5. H.-J. Hardtke, B. Heimann und H. Sollmann: *Technische Mechanik II*. Leipzig: Carl Hanser, 1997.
6. W. Hauger, W. Schnell und D. Gross: *Technische Mechanik, Band 3 – Kinetik*. Berlin: Springer, 2004.
7. G. Henning, A. Jahr und U. Mrowka: *Technische Mechanik mit Mathcad, Matlab und Maple*. Wiesbaden: Vieweg, 2004.
8. R.C. Hibbeler: *Technische Mechanik 3 – Dynamik*. München: Pearson Studium, 2012
9. S. Kessel und D. Fröhling: *Technische Mechanik, Fachbegriffe im deutschen und englischen Kontext*. Stuttgart: Teubner, 1998.
10. A. Kühhorn und G. Silber: *Technische Mechanik für Ingenieure*. Heidelberg: Hüthig, 2000.
11. K. Magnus und H.H. Müller-Slany: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Stuttgart: Teubner, 2005.
12. M. Mayr: *Technische Mechanik*. Leipzig: Carl Hanser, 1999.
13. W.H. Müller und F. Ferber: *Technische Mechanik für Ingenieure*. München: Hanser, 2011.
14. J.L. Meriam and L.G. Kraige: *Engineering Mechanics, Dynamics*. New York: Wiley, 1997.
15. W.F. Riley and L.D. Sturges: *Engineering Mechanics, Dynamics*. New York: Wiley, 1996.

Sachwortverzeichnis

A

abgeschlossenes System, **70** , 80
 Absolutbeschleunigung, 27 , **31** , 32 , 33
 Absolutgeschwindigkeit, 27 , **30** , 31
 Amplitude, 93 , 101 , 106 , 107
 Anfangsbedingung, 90 , 93 , 94 , 95 , 97
 Anfangswertproblem, 93 , 94 , 95 , 97
 Arbeit, 75 , **77**

B

Bahn, 19 , 20
 Beschleunigung, 13 , 14 , **20** , 21 , 22 , 27 , 31
 Bewegung, **18** , 24 , 27 , **39**
 allgemeine, 41
 ebene, **35** , 41 , 45 , 66
 geradlinige, 13
 Planeten—, 19
 räumliche, 19 , 66
 Relativ—, 27
 Satelliten—, 19 , 24
 Bewegungsgleichung, 63 , **67**
 Bezugspunkt, 43 , 58 , 59 , 61
 Bindung, 36 , 63 , **64** , 67 , 81
 Bindungssystem, 67

C

Coriolis
 —beschleunigung, 32
 —kraft, 33

D

Dämpfer, 63 , 81
 Dämpfung
 Grenzfall der, **97** , 100 , 103
 keine, **97** , 98 , 103
 schwache, 93 , **97** , 98 , 103
 starke, 93 , **97** , 100 , 103
 Differentialgleichung, 63 , 87 , 93
 Differentiation, **10** , 12 , 16 , 19 , 27 , **31**
 Drall, 43 , **44** , 49 , 57 , 58 , 59 , 71

Drallbilanz, 69 , **72** , 81 , 83
 Drallerhaltung, 72
 Drallsatz, 43 , **45** , 50 , 52 , 55 , 57 , **60** , 61 , 62 ,
 63 , 66 , 69 , 71
 Drehachse, 47 , 53
 Drehbeschleunigung, 31
 Drehbewegung, 35 , 36 , 40 , 45
 Drehfeder, 8
 Drehimpuls. *Siehe* Drall
 Drehung, 41 , 45 , 49
 permanente, 49 , 52
 Drehungsmatrix, 27 , 29 , 35 , 36 , **37**
 Druckkraft, 74
 Dynamik, 6 , 17

E

Eigenfrequenz, 101
 Eigenvektor, 46
 Eigenwert, 46 , 97
 Eigenwertproblem, 43 , **46**
 Elementardrehmatrix, 37
 Elementardrehung, 35 , 36 , 37
 Energie, 75
 kinetische, 75 , **76** , 82
 potentielle, 75 , 77 , **78**
 Energiebilanz, 75 , **79** , 80
 Euler, 45 , 60
 —beschleunigung, 32
 —formel, 98
 —kraft, 33
 —winkel, 37
 Eulergleichungen
 dynamische, 50 , 52
 kinematische, 38

F

Feder, **8** , 63 , 75 , 78 , 81
 Feder—Masse—Schwinger, 94
 Fixpunkt, 32 , 40 , 41 , 45 , 59 , 61
 Föppl—Symbol, 13 , **16**
 Freiheitsgrad, 36 , **67** , 88



Freischneiden, 8 , 63 , **67** , 84

Frequenz, 93 , 95

G

Geschwindigkeit, 13 , 14 , **20** , 21 , 22 , 27 , 30 ,
31 , 40 , 75 , 81
 astronautische, 26

Gewichtskraft, **8** , 78 , 81

Gleichgewichtsbedingungen, 9

Gleichgewichtslage, 87 , **92** , 101

Gleitreibung, **8** , 63 , 65 , 67

H

Haftreibung, **8** , 63 , 64 , 68

harmonische Erregung, 101 , 104

Hauptachsensystem, 43 , **46** , 50 , 52

Hauptträgheitsmoment, 46

homogene Lösung, 101 , 102

Huygens, 43 , 47

I

Impuls, **17** , 44 , 49 , 57 , 58 , 70

Impulsbilanz, 69 , **72** , 81 , 83

Impulserhaltung, 72

Impulsmoment. *Siehe* Drall

Impulssatz, **17** , 19 , 23 , 24 , 27 , 57 , **60** , 62 , 63
 , 66 , 69 , 70

Inertialsystem, 27

Integration, **10** , 16 , 67

K

Kinematik, 6 , 35

kinematische Beziehung, 63

Kinetik, 6 , 43 , 57 , 69

Koordinaten, 36
 kartesische, 21

Koordinatendarstellung, **28** , 31

Koordinatensystem, 19 , 21 , 23 , **28** , 55
 bewegtes, 27 , 30
 kartesisches, 23
 körperfestes, **35** , 44 , 57 , 59 , 61
 raumfestes, 21 , 23 , **27** , 30 , 44 , 57 , 59 , 61

Zylinder—. *Siehe* Zylinderkoordinaten

Koordinatentransformation, **28** , 47

Kraft, 8 , 77

 äußere, 70

 eingeprägte, 8 , 75

 Feder—. *Siehe* Feder

 Gewichts—. *Siehe* Gewichtskraft
 innere, 70

 Reaktions—. *Siehe* Reaktionskraft

Kraftelement, 63

Kräfte-System, 9 , 77

Kraftstoß, 15 , **72** , 81 , 84

Kraftwinder, **9** , 66

Kreisel, 49

 momentenfreier, 49 , 52

 schwerer, 55

 symmetrischer, 53 , 54 , 55

Kreiselmoment, 49 , 51

Kreisfrequenz, 93 , **95** , 99

L

Lage, 14 , **20** , 21 , 22 , 30 , 75 , 81

Lager, 64

 stoßfrei, 86

Lehr'sches Dämpfungsmaß, 93 , **99** , 104

Leistung, 75 , **77**

Linearisierung, 92

logarithmisches Dekrement, 99

M

Massenaufnahme, 74

Massenausstoß, 73

Massendeviationsmoment, 46

Massenmittelpunkt, 9 , 71

Massenpunkt, **13** , 17 , 19 , 43 , 44 , 49 , 63 , 75 ,
 76 , 79

Massenstrom, 69

Massenträgheitsmoment, 43 , **46** , 48
 bez. e. Achse, 47

Massenzentrumsatz. *Siehe* Schwerpunktsatz

Matrix

 Einheits-, 12

 orthogonale, 12

 schiefsymmetrische, 12

 symmetrische, 12

Mehrkörpersystem, **63** , 76 , 80 , 81

Moment, 8 , 77
Reaktions–. *Siehe* Reaktionsmoment

Momentanpol, 35 , **42**

Momentenstoß, **72** , 84

N

Newton, **17** , 19 , 33

nichtabgeschlossenen System, 69

nichtabgeschlossenes System, **73**

Nutation, 49 , 52 , 54

O

orthogonal, 12 , 36

P

Partikulärlösung, 101 , 102 , 103 , 104

Pendel, 90 , 94

Periode, 91 , 93 , **95** , 99

Phasenkurve, 90 , 105

Phasenporträt, 90

Polkurve, 35 , **42**

Potentialfunktion, 78

Potentialkraft, 75 , 78

Präzession, 49 , 55

R

Raketengleichung, 73

Reaktionskraft, 8 , 63 , **64** , 68 , 75

Reaktionsmoment, 63 , **64** , 68

Reibung

Gleit–. *Siehe* Gleitreibung

Haft–. *Siehe* Haftreibung

Relativbeschleunigung, 27 , **31** , 32

Relativgeschwindigkeit, 27 , **31**

Relativkinematik, 30 , 35 , 40

Relativkinetik, 33

Resonanz, 101 , 104 , **106**

Richtungskosinus, 36

Rösselsprung, **12** , 38

Rotation, 57

Rotor, 50 , 51

S

Scheinkraft, 27 , 33

Schubkraft, 73

Schwebung, 101

Schwerpunkt, **9** , 57 , 59 , 61

Schwerpunktsatz, 69 , **71**

Schwingung, 49 , 87

angefachte, 88

erzwungene, 89 , 101

freie, 89 , 93 , 101

gedämpfte, 88

lineare, 89 , 92 , 93 , 94 , 101

nichtlineare, 89 , 90 , 92

parametererregte, 89

periodische, 88

regellose, 88

selbsterregte, 89

gedämpfte, 93 , 97

ungedämpfte, 93 , 95 , 106

Schwingungsgleichung, 87 , 90 , 94 , 95 , 97 , 102

Schwingungszeit, 91

Skalar, 7

Skalarprodukt, 11 , **12**

Sprungerregung, 101 , 103

Spurkurve, 35 , **42**

Stabilität, 53

Starrkörper, **35** , 36 , 39 , 44 , 57 , 58 , 63 , 75 , 76

Starrkörperbewegung, 35 , 39 , 57

Starrkörperdrehung, 43

Starrkörperkinematik, 35 , **40** , 44 , 58

Statik, 6

Steiner, 43 , 47

Stereomechanik, 6 , 7

Stoß, 69 , **81**

elastischer, 82 , 84 , 85

exzentrischer, 83

gerader, 85

glatter, 85

plastischer, 82 , 84

schiefer, 85

teilelastischer, 84

teilplastischer, 84

zentrischer, 85

Stoßarten, 82

Stoßgesetz, 81



Stoßzahl, 84

Stoßzeit, 81

Superposition, 95 , 97 , 102

Superpositionsprinzip, 94

System

abgeschlossenes. *Siehe* abgeschlossenes System

konservatives, 75 , 80

nichtabgeschlossenes. *Siehe* nichtabgeschlossenes System

T

Taylorreihe, 92

Tensor, 7

Trägheitskraft, 33

Trägheitsmoment. *Siehe* Massenträgheitsmoment

Trägheitsradius, 47

Trägheitstensor, 43 , **46** , 57 , 61 , 75

kugelsymmetrischer, 46

rotationssymmetrischer, 46

Translation, 20 , 35 , 40 , 41 , 57

V

Vektor, 7

Vektoralgebra, 11

W

Weg, 21

Werkstoffpaarung, 84

Wertigkeit, 64

Winkelgeschwindigkeit, 29 , 35 , **38**

Wirkungsgrad, 75 , 77

Z

Zentrifugalkraft, 33

Zentripetalbeschleunigung, 32

Zylinderkoordinaten, **22** , 23 , 27



Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

D. Bestle

Technische Mechanik II
Dynamik

Übungen zur Vorlesung



Lehrstuhl
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle