Prüfungsklausur Technische Mechanik II

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 8 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

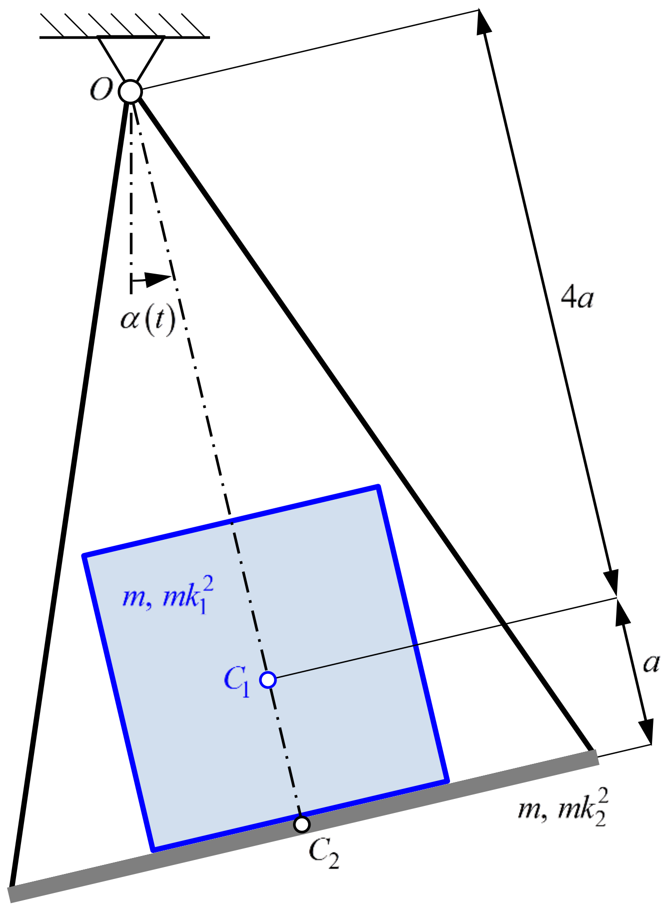
Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Beim Anblick der schaukelnden Kinder stellen sich verschiedene Fragen nach Bewegungsablauf und Sicherheit, die im Rahmen der Prüfung anhand vereinfachter Modelle untersucht werden sollen.

Aufgabe 1 (17 Punkte)

Statt den Kindern im Korb liegt hier ersatzweise eine Kiste (Masse m, Trägheitsmoment mk_1^2 bzgl. Schwerpunkt C_1) auf einem dünnen Brett (Masse m, Trägheitsmoment mk_2^2 bzgl. Schwerpunkt C_2), das über masselose Seile in O aufgehängt ist und mit dem Winkel $\alpha(t)$ schwingt.



a) Wie bezeichnet man die Größen k_1 und k_2 in der Aufgabenstellung?

____

b) Zeichnen Sie die Momentanpole P_1 und P_2 von Kiste und Brett ein.

c) Zeichnen Sie die Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ der beiden Körperschwerpunkte für eine Bewegung nach rechts ein (wählen Sie $v_1 \mathrel{\hat{=}} 2\,\text{cm}$).

d) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Schwerpunktsgeschwindigkeiten und der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\alpha}$?

$v_1 =$ ______ , $v_2 =$ ______

e) Wie groß sind kinetische und potentielle Energie der Kiste? (Nullniveau in O)

$T_1 =$ ________________ ,

$U_1 =$ ________________

f) Wie groß sind kinetische und potentielle Energie des Bretts? (Nullniveau in O)

$T_2 =$ ________________ ,

$U_2 =$ ________________

g) Wie lautet der Energiesatz bei einer gegebenen Anfangsenergie E_0 ?

☐ $T_1 + U_1 = T_2 + U_2 - E_0$ ☐ $T_1 - U_1 + T_2 - U_2 = E_0$

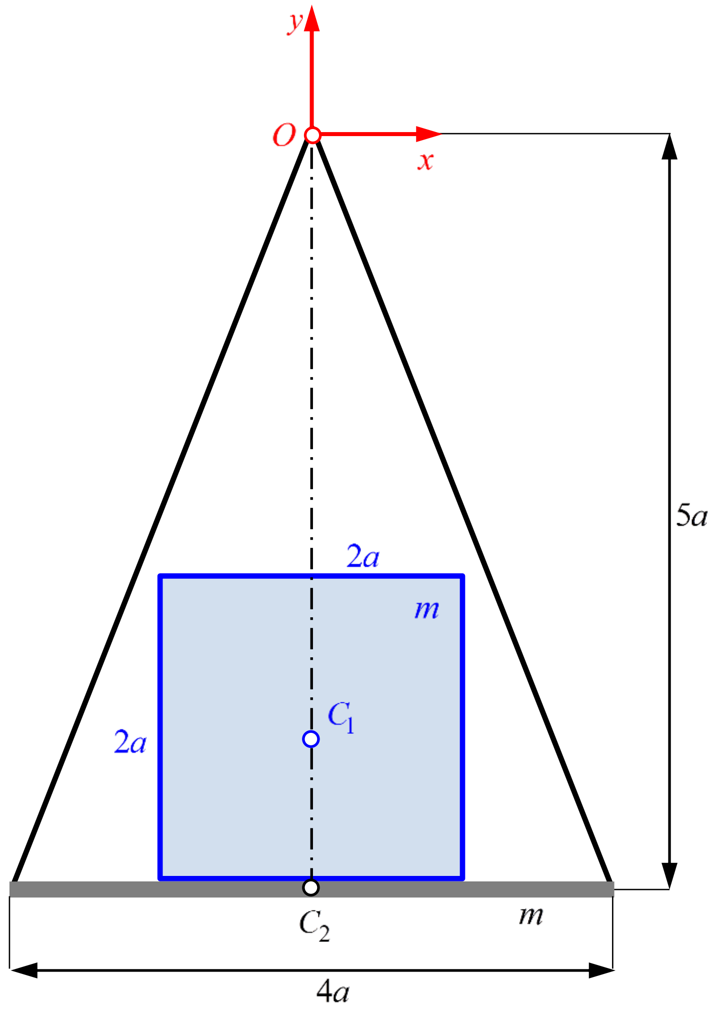
☐ $T_1 + T_2 = E_0 + U_1 + U_2$ ☐ $T_1 + U_1 + T_2 + U_2 = E_0$

h) Welches Ergebnis findet man daraus für die Winkelgeschwindigkeit in Abhängigkeit der Auslenkung α ?

$\dot{\alpha} =$ ______________________________

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Das System in Aufgabe 1 besteht nun aus einer würfelförmigen homogenen Kiste (Masse m, Kantenlänge $2a$) und einem dünnen, homogenen Brett (Masse m, Kantenlänge $4a$).



a) Geben Sie die y-Koordinaten der Körperschwerpunkte C_1 und C_2 sowie des Gesamtschwerpunkts C_{ges} an.

$y_1 =$ ______ , $y_2 =$ ______ , $y_{ges} =$ ______

b) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment der Kiste um die z-Achse bzgl. Körperschwerpunkt C_1 bzw. Aufhängepunkt O?

$I_{C_1} =$ _________ , $I_{O_1} = I_{C_1} +$ ________ $=$ ___________

c) Wie groß ist das Massenträgheitsmoment des Bretts um die z-Achse bzgl. Körperschwerpunkt C_2 bzw. Aufhängepunkt O?

$I_{C_2} =$ _________ , $I_{O_2} = I_{C_2} +$ ________ $=$ ___________

d) Wie groß ist damit das Massenträgheitsmoment des Gesamtsystems bzgl. Aufhängepunkt O?

$I_O =$ _________

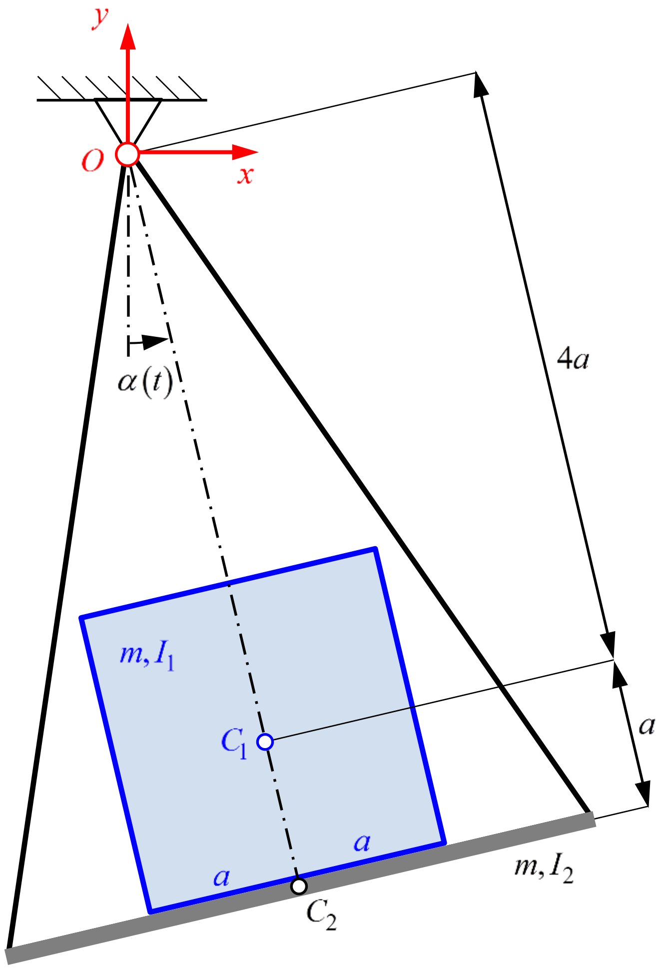
e) Wie berechnet sich daraus das Massenträgheitsmoment des Gesamtsystems bzgl. seines Gesamtschwerpunkts C_{ges}?

☐ $I_{C_{ges}} = I_O + 81ma^2$ ☐ $I_{C_{ges}} = I_O - 81ma^2$

☐ $I_{C_{ges}} = I_O + \frac{81}{4}ma^2$ ☐ $I_{C_{ges}} = I_O - \frac{81}{2}ma^2$

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Im Rahmen einer Sicherheitsbetrachtung wird nun der Kontakt zwischen der Kiste (Masse m, Trägheitsmoment I_1 bzgl. Schwerpunkt C_1) und dem Brett (Masse m, Trägheitsmoment I_2 bzgl. Schwerpunkt C_2) näher betrachtet. Der Kontakt zwischen den beiden Körpern ist reibungsbehaftet (Haftreibungskoeffizient μ_0, symmetrischer Kontaktbereich $\pm a$).



a) Beschreiben Sie die Lage der beiden Körperschwerpunkte im Koordinatensystem.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

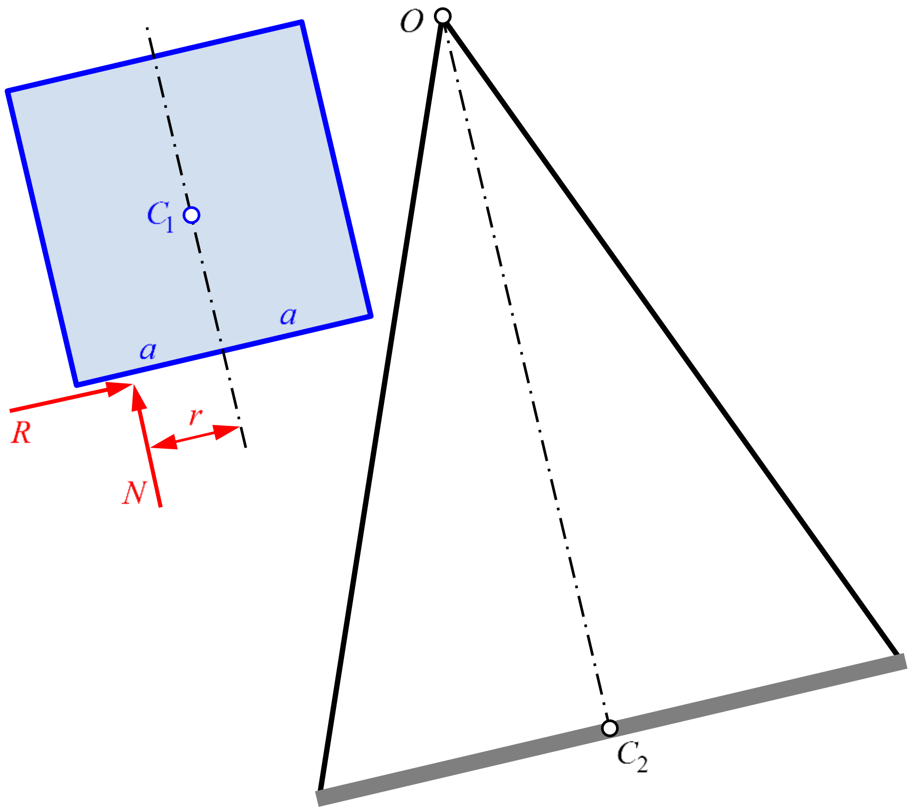
b) Welche Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ergeben sich daraus für die beiden Körperschwerpunkte?

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c) Ergänzen Sie alle fehlenden Kräfte/Momente im Freischnittbild.



d) Ergänzen Sie Impuls- und Drallsätze für die Kiste.

$$m\boldsymbol{a}_1 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix},$$

$$I_1\ddot{\alpha} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

e) Welche Kontaktkräfte ergeben sich daraus?

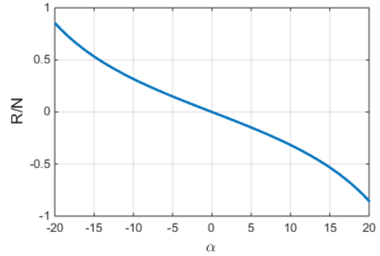
☐ $R = m\left(4a\dot{\alpha}^2 - g\sin\alpha\right)$ ☐ $R = m\left(4a\dot{\alpha}^2 + g\cos\alpha\right)$

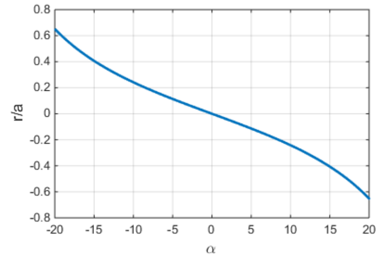
☐ $R = m\left(4a\ddot{\alpha} + g\sin\alpha\right)$ ☐ $R = m\left(4a\ddot{\alpha} + g\cos\alpha\right)$

☐ $N = m\left(4a\dot{\alpha}^2 - g\sin\alpha\right)$ ☐ $N = m\left(4a\dot{\alpha}^2 + g\cos\alpha\right)$

☐ $N = m\left(4a\ddot{\alpha} + g\sin\alpha\right)$ ☐ $N = m\left(4a\ddot{\alpha} + g\cos\alpha\right)$

f) Nebenstehende Bilder zeigen die Kontaktverhältnisse für eine Anfangsauslenkung $\alpha_0 = 20°$. Welche Aussagen können Sie daraus ablesen, wenn der Haftreibungskoeffizient $\mu_0 = 0.5$ ist?





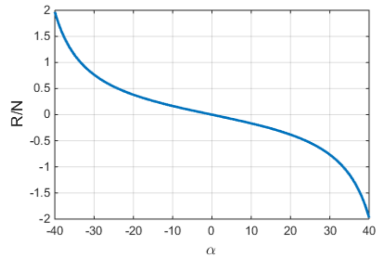
☐ *Kiste rutscht nicht*

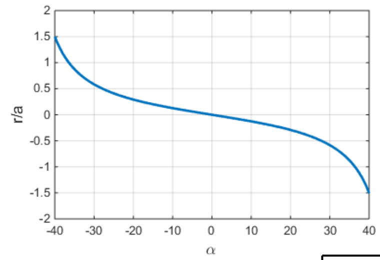
☐ *Kiste rutscht für* $|\alpha| >$ ______

☐ *Kiste kippt nicht*

☐ *Kiste kippt für* $|\alpha| >$ ______

g) Nebenstehende Bilder zeigen nun die Kontaktverhältnisse für eine größere Anfangsauslenkung $\alpha_0 = 40°$. Welche Aussagen können Sie daraus ablesen, wenn der Haftreibungskoeffizient ebenfalls $\mu_0 = 0.5$ ist?





☐ *Kiste rutscht nicht*

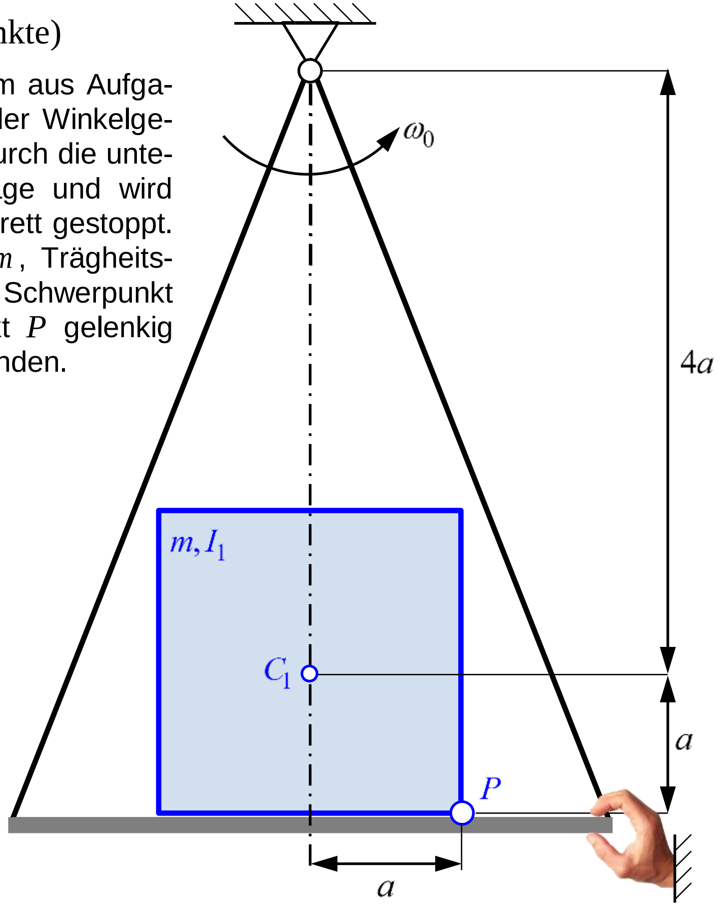
☐ *Kiste rutscht für* $|\alpha| >$ ______

☐ *Kiste kippt nicht*

☐ *Kiste kippt für* $|\alpha| >$ ______

Aufgabe 4 (15 Punkte)

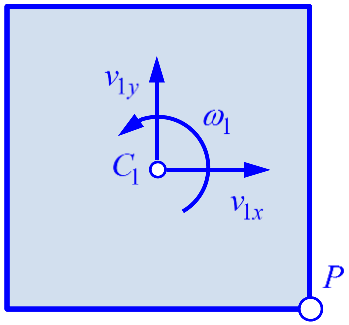
Das Schaukelsystem aus Aufgabe 3 schwingt mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 durch die untere Gleichgewichtslage und wird dann plötzlich am Brett gestoppt. Die Kiste (Masse m, Trägheitsmoment I_1 bzgl. Schwerpunkt C_1) ist hier im Punkt P gelenkig mit dem Brett verbunden.



a) Wie ist der Geschwindigkeitszustand der Kiste vor dem Stoß?

$\omega_1^- =$ ______ ,

$v_{1x}^- =$ ______ , $v_{1y}^- =$ ______



b) Welche Geschwindigkeit folgt daraus mithilfe der Starrkörperkinematik für den Gelenkpunkt P vor dem Stoß?

$v_{Px}^- =$ ______ , $v_{Py}^- =$ ______

c) Zeichnen Sie in obiges Bild die Kraftstöße auf die Kiste unter der Annahme ein, dass die Kiste durch den Stoß vom Brett abhebt.

d) Formulieren Sie Impuls- und Drallbilanzen für die Kiste.

____

____

____

e) Welche Stoßgleichungen folgen am Gelenkpunkt P aus dem plötzlichen Festhalten des Bretts?

☐ $v_{1x}^+ + a\omega_1^+ = 0,\ v_{1y}^+ + a\omega_1^+ = 0$

☐ $v_{1x}^+ - a\omega_1^+ = 0,\ v_{1y}^+ - a\omega_1^+ = 0$

☐ $v_{1x}^+ + v_{1y}^+ = 0,\ \omega_1^+ = 0$

f) Welche Winkelgeschwindigkeit der Kiste ergibt sich aus d) und e) nach dem Stoß?

$\omega_1^+ =$ _______________

g) Wie könnte man das Festhalten des Bretts interpretieren?

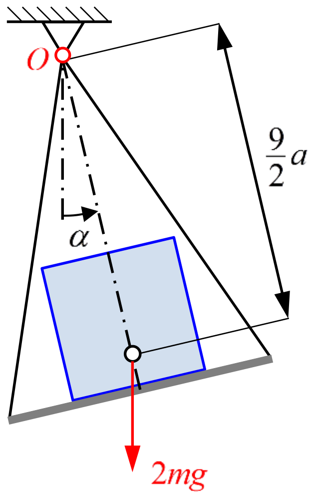
☐ *elastischer Stoß* ☐ *plastischer Stoß* ☐ *kein Stoß*

h) Was findet im Gelenk statt?

☐ *elastischer Stoß* ☐ *plastischer Stoß* ☐ *teilelastischer Stoß*

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Das Schaukelsystem (Masse $2m$, Trägheitsmoment I_O bzgl. Aufhängepunkt O, Schwerpunktsabstand $9a/2$) kann auch in seiner Gesamtheit betrachtet werden.



a) Formulieren Sie den Drallsatz des Gesamtsystems bzgl. Fixpunkt O.

____

b) Wie lautet die zugehörige Schwingungsgleichung in Standardform?

____

c) Mit entsprechenden Parametern findet man die nichtlineare Schwingungsgleichung

$$\ddot{\alpha} + 4\pi^2 \sin\alpha = 0.$$

Linearisieren Sie diese Schwingungsgleichung für $\alpha \ll 1$.

____

d) Aus einer Simulation ergeben sich die vier nebenstehenden Diagramme für $\alpha(t)$. Welches zeigt die Lösung der linearisierten Schwingungsgleichung in Teilaufgabe c)?

☐ $a)$ ☐ $b)$ ☐ $c)$ ☐ $d)$

e) Welches Diagramm gehört zur ursprünglichen nichtlinearen Schwingungsgleichung in Teilaufgabe c)?

☐ $a)$ ☐ $b)$ ☐ $c)$ ☐ $d)$

f) Alle vier Diagramme haben die gleichen Anfangsbedingungen. Wie lauten diese?

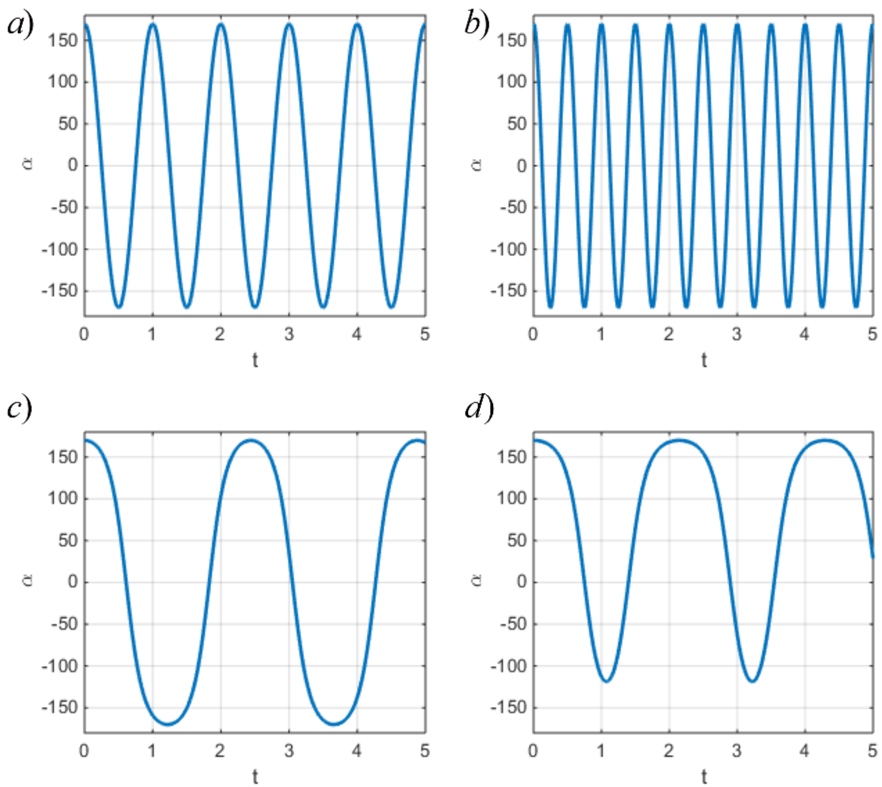
$\alpha(0) =$ ________ , $\dot{\alpha}(0) =$ ________

g) Welche verbale Anweisung würden Sie einer Mutter geben, um diese Anfangsbedingung zu erzeugen?

____

____

____



Aufgabe 6 (4 Punkte)

Der Energiesatz für das System in Aufgabe 5 lautet mit der Anfangsenergie E_0 bzgl. des Fixpunkts O

$$\frac{1}{2} I_O \dot{\alpha}^2 - 9mga\cos\alpha = E_0 .$$

a) Leiten Sie diese Gleichung auf beiden Seiten nach der Zeit ab.

$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

b) Lösen Sie die Gleichung nach $\ddot{\alpha}$ auf.

$\ddot{\alpha} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

c) Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit dem in Aufgabe 5b. Welche Schlussfolgerung ziehen Sie daraus?

____

____

ENDE