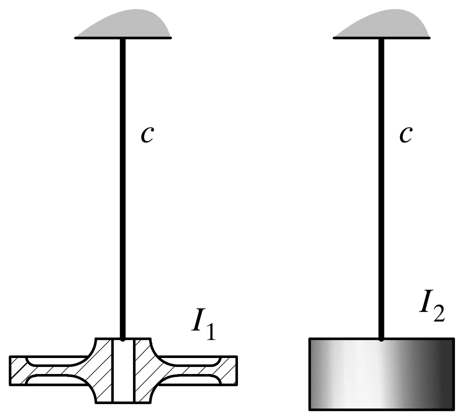
14 Freie Schwingungen

Aufgabe 1

Das Trägheitsmoment I_1 eines Schwungrads lässt sich dadurch ermitteln, dass man es an einem Stahldraht aufhängt und die Periode T_1 der Drehschwingungen misst. Da die Torsionssteifigkeit der Aufhängung im Allgemeinen nicht genügend genau bekannt ist, wiederholt man den Versuch mit einem zweiten Probekörper mit bekanntem Trägheitsmoment I_2 .

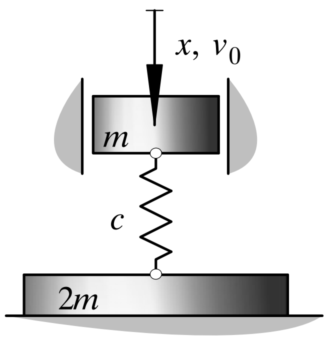


a) Wie lautet die Schwingungsgleichung der Drehschwingung eines Schwungrads (Trägheitsmoment I) an einem Draht (Torsionssteifigkeit c), wie groß ist die Kreisfrequenz?

b) Wie groß ist das Trägheitsmoment I_1 der Schwungscheibe, wenn man $T_1 = 9.2\ \mathrm{s}$, $T_2 = 4.0\ \mathrm{s}$ misst und der Probekörper ein homogener Zylinder (Masse $m = 100\ \mathrm{kg}$, Radius $r = 20\ \mathrm{cm}$) ist?

Aufgabe 2

Ein Körper (Masse m) ist über eine Feder (Steifigkeit c) mit einer Platte (Masse $2m$) verbunden. Die Auslenkung x der oberen Masse wird bezüglich ihrer statischen Gleichgewichtslage gemessen.



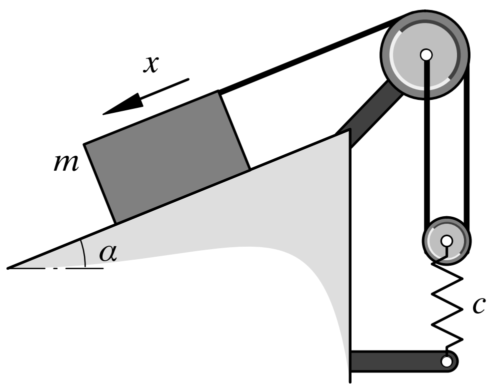
a) Wie groß ist die Kreisfrequenz der Vertikalschwingungen der oberen Masse, wenn die untere Platte liegenbleibt?

b) Berechnen Sie die Bewegung $x(t)$ der oberen Masse, wenn diese aus der Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit v_0 nach unten angestoßen wird.

c) Wie groß darf die Geschwindigkeit v_0 höchstens sein, damit die Platte nicht abhebt?

Aufgabe 3

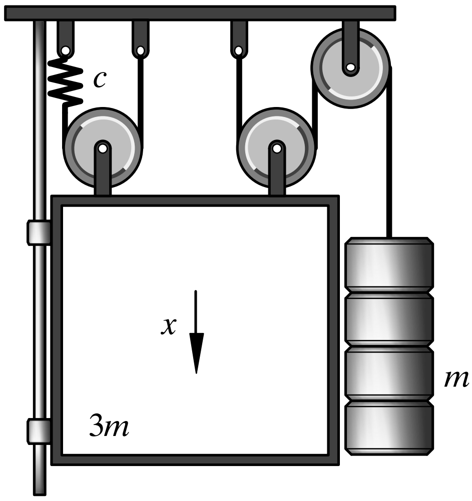
Ein Körper (Masse m) gleitet reibungsfrei auf einer schiefen Ebene (Winkel α) und wird über ein masseloses Seil und masselose Umlenkrollen durch eine Feder (Steifigkeit c) gehalten. Die Auslenkung x des Körpers wird bezüglich seiner statischen Gleichgewichtslage gemessen.



a) Formulieren Sie die Schwingungsgleichung.

b) Wie groß ist die Kreisfrequenz der möglichen Schwingung?

Aufgabe 4

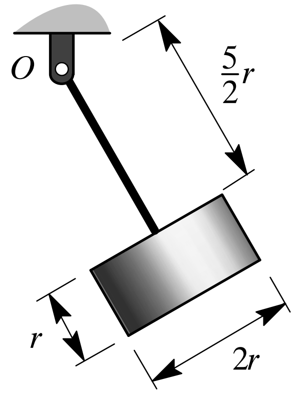


Ein Aufzug (Masse $3m$) wird über masselose Seilrollen von einem Gegengewicht (Masse m) und einer Feder (Steifigkeit c) gehalten. Die Auslenkung x des Aufzugs wird bezüglich seiner statischen Gleichgewichtslage gemessen.

a) Formulieren Sie die Schwingungsgleichung für Vertikalschwingungen des Aufzugs.

b) Wie groß ist die Kreisfrequenz der Aufzugschwingung?

Aufgabe 5

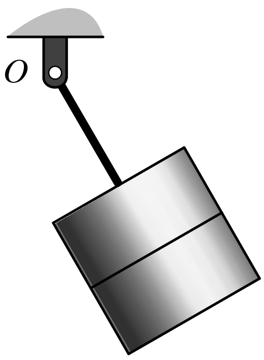


Eine homogene Kreisscheibe (Masse m, Durchmesser $2r$, Dicke r) bildet mit einem dünnen, masselosen Stab ein Pendel, das im Punkt O gelenkig gelagert ist.

a) Stellen Sie die Schwingungsgleichung für kleine Ausschläge φ auf.

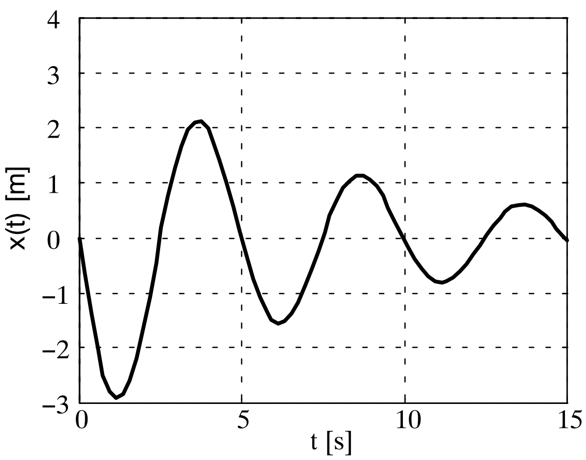
b) Auf experimentellem Weg wurde für kleine Pendelausschläge φ eine Schwingungsdauer $T = 1\ \mathrm{s}$ gemessen. Wie groß sind die Eigenfrequenz ω_0 und die Abmessung r?

c) Auf die vorhandene Kreisscheibe wird ein Zusatzgewicht gleicher Masse und Abmessung gesetzt. Wie groß ist die Eigenfrequenz des veränderten Systems für gegebenes r?



Aufgabe 6

Für eine experimentelle Schwingung wurde der Schwingweg x über der Zeit t aufgezeichnet.



a) Um welchen Schwingungstyp handelt es sich (ungedämpft, schwach gedämpft, stark gedämpft)?

b) Wie waren die Anfangsbedingungen $x(0)$, $\dot{x}(0)$?

c) Ermitteln Sie folgende Kenngrößen der Schwingung: Schwingungsperiode T, Frequenz f, Kreisfrequenz ω, logarithmisches Dekrement ϑ, Lehr'sches Dämpfungsmaß D.

Aufgabe 7

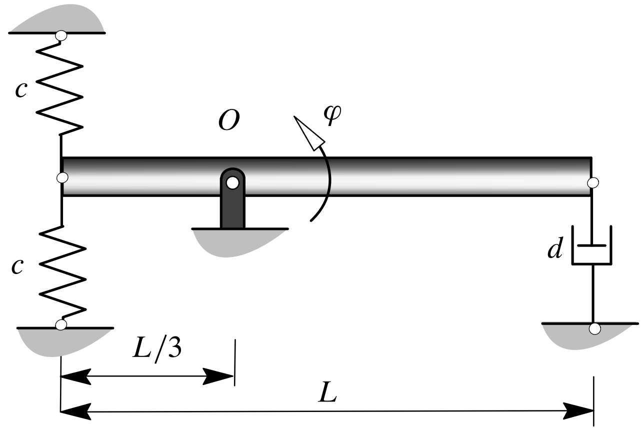
Um die Genauigkeit bei der Bestimmung des logarithmischen Dekrements zu erhöhen, kann man mehrere Schwingungszyklen heranziehen. Zeigen Sie, dass man bei Verwendung der vorzeichengleichen Amplituden im Abstand von m Zyklen das logarithmische Dekrement wie folgt erhält:

$$\vartheta = \frac{1}{m} \ln \frac{x_n}{x_{n+m}} .$$

Überprüfen Sie dieses Ergebnis an Aufgabe 6.

Aufgabe 8

Ein homogener Balken (Masse m, Länge L) kann um den Punkt O Drehbewegungen ausführen.



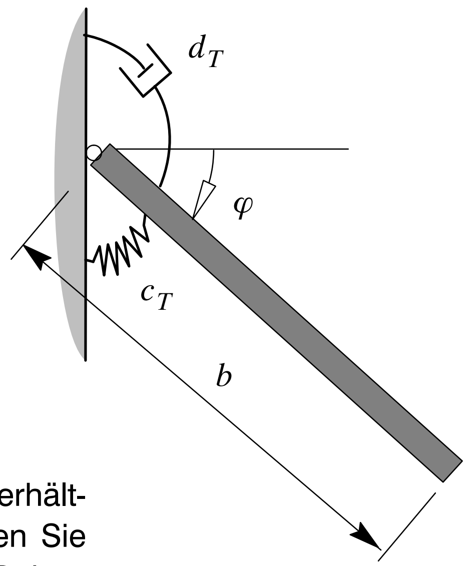
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen φ des Balkens auf und formulieren Sie daraus die Standardform der Schwingungsdifferentialgleichung. Charakterisieren Sie die Schwingung.

b) Wie groß sind die Kreisfrequenz und das Lehr'sche Dämpfungsmaß D des Systems?

c) Bestimmen Sie die Lösung der Schwingungsgleichung für die Parameterverhältnisse $d/m = 1/2\text{s}^{-1}$, $c/m = 5\text{s}^{-2}$ und die Anfangsbedingungen $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 1\text{rad/s}$.

Aufgabe 9

Eine Schwingtür (homogene Platte, Masse m, Breite b, Höhe h) wird durch eine Drehfeder (Drehfederkonstante c_T) und einen Drehdämpfer (Drehdämpferkonstante d_T) in ihrer Bewegung beeinflusst. Die Feder ist für den Auslenkungswinkel $\varphi = 0$ entspannt.



a) Stellen Sie die Schwingungsdifferentialgleichung der gedämpften Drehtür auf.

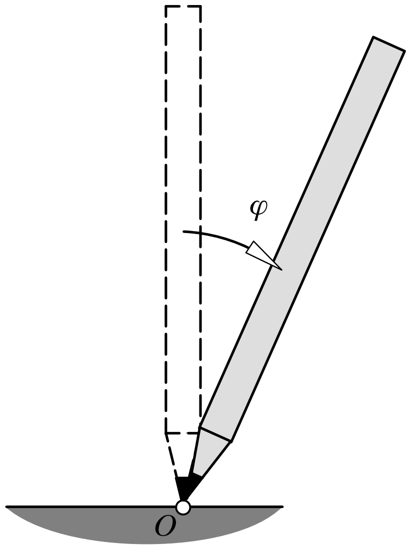
b) Wie groß muss die Dämpfung d_T sein, damit keine Schwingung, sondern nur aperiodisches Verhalten auftritt?

c) Welches Schwingungsverhalten tritt für die Parameterverhältnisse $c_T/mb^2 = 1/3\text{s}^{-2}$, $d_T/c_T = 0.87\text{s}$ auf. Berechnen Sie die zugehörige Kreisfrequenz, das logarithmische Dekrement und das Lehrsche Dämpfungsmaß.

Aufgabe 10

Für kleine Anfangsauslenkungen φ_0 eines Bleistifts aus der aufrechten Position ergibt sich für die Fallbewegung $\varphi(t) \ll 1$ das Anfangswertproblem

$$\ddot{\varphi} - 100\varphi = 0\,, \quad \varphi(0) = \varphi_0\,, \; \dot{\varphi}(0) = 0\,.$$



a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems?