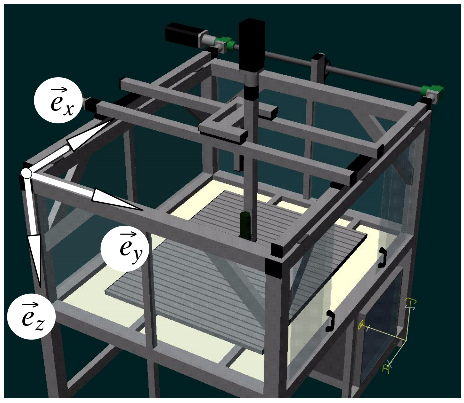
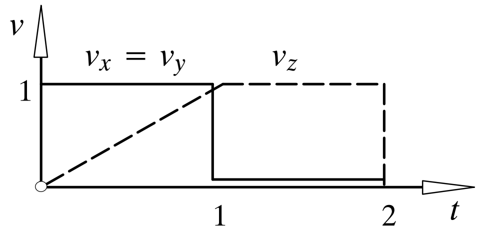
3 Räumliche Punktbewegung

Aufgabe 1

Ein Portalkran mit drei Achsen in kartesischer Anordnung ist CNC–gesteuert. Für die Geschwindigkeiten der einzelnen Achsen werden die dargestellten Geschwindigkeitsprofile vorgegeben (alle Angaben in SI–Einheiten). Der Greifarm beginnt seine Bewegung im Koordinatenursprung.





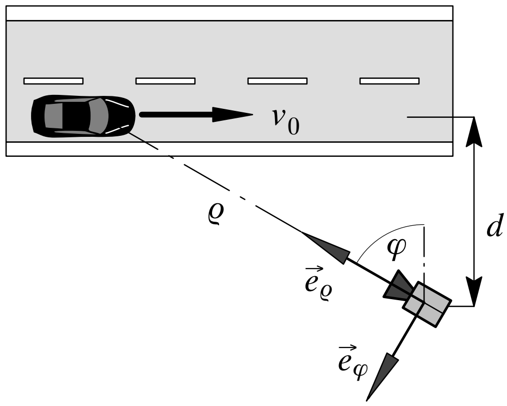
a) Beschreiben Sie $\vec{v}(t)$ und berechnen Sie $\vec{r}(t)$ im gegebenen raumfesten kartesischen Koordinatensystem.

b) Zeichnen Sie die Bewegungsdiagramme $x(t)$, $y(t)$ und $z(t)$.

c) Zeichnen Sie die räumliche Bahn des Greifarms.

Aufgabe 2

Zur Verkehrsüberwachung wird eine Kamera im Abstand $d = 200\ \mathrm{m}$ von der Fahrbahn eingesetzt. Dazu wird die Kamera ständig auf das vorbeifahrende Fahrzeug ausgerichtet. Gemessen werden können der Winkel φ und die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$.



a) Stellen Sie den Geschwindigkeitsvektor des Fahrzeugs in dem sich mit der Kamera mitdrehenden Zylinderkoordinatensystem dar. Welche Beziehungen ergeben sich daraus für $\dot{\varrho}$ und $\dot{\varphi}$?

b) Bei der automatischen Verfolgung eines Fahrzeugs mit konstanter Geschwindigkeit v_0 muss sich die Kamera bei einem Winkel von $\varphi = 60^\circ$ mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = -0.1\ \mathrm{rad/s}$ drehen. Wie groß ist die Fahrzeuggeschwindigkeit?

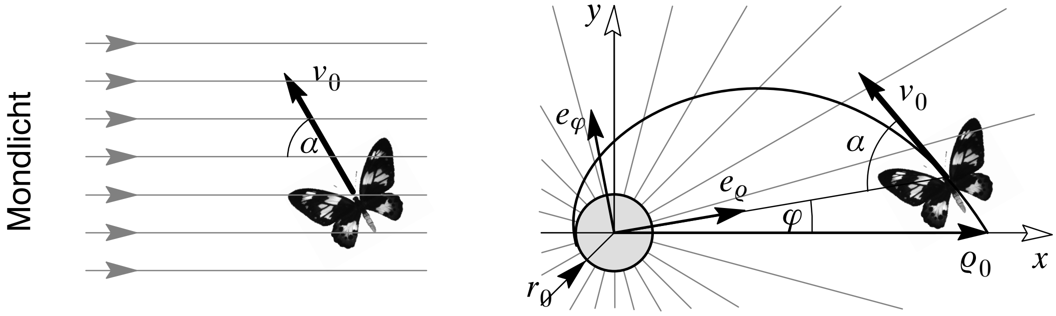
Aufgabe 3

Ein Nachtfalter fliegt mit konstanter Geschwindigkeit v_0 und hält dabei typischerweise den Einfallswinkel α zum Mondlicht konstant um geradeaus zu fliegen. Wenn der Nachtfalter den Mond mit einer Laterne verwechselt entsteht durch den konstanten Einfallswinkel eine krummlinige Bahn.

a) Stellen Sie die Geschwindigkeit des Nachtfalters beim Flug um die Laterne in einem sich mitbewegenden Zylinderkoordinatensystem dar.

b) Bestimmen Sie die Bahnkoordinaten $\varrho(t)$ und $\varphi(t)$. Der Startpunkt des Nachtfalters ist $\varrho(0) = \varrho_0$, $\varphi(0) = 0$.

c) Wann stößt der Nachtfalter an den Laternenrand (Radius r_0)



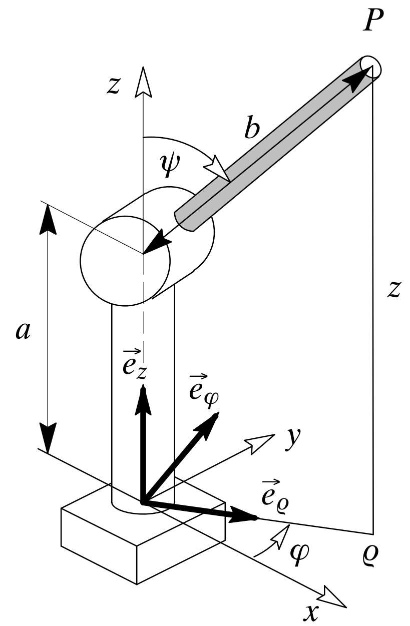
Aufgabe 4

Ein Roboter besteht aus zwei Armen, einem vertikalen Drehgelenk (Verdrehwinkel φ) und einem horizontalen Drehgelenk (Verdrehwinkel ψ). Die beiden Antriebsmotoren bewegen den Roboter mit den Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$ und $\dot{\psi}$.

a) Beschreiben Sie Lage und Geschwindigkeit des Greifers P in kartesischen Koordinaten.

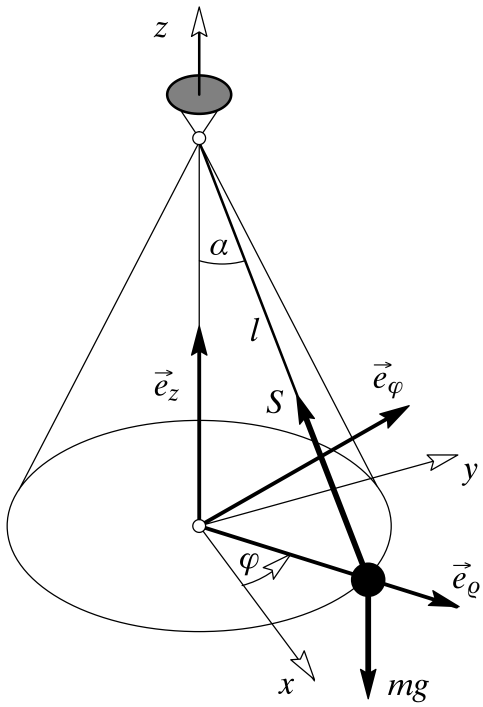
b) Welchen Lage- und Geschwindigkeitsvektor hat der Greifer im Zylinderkoordinatensystem?

c) Berechnen Sie die Geschwindigkeitsbeträge in beiden Koordinatensystemen und vergleichen Sie die Ergebnisse.



Aufgabe 5

Unter bestimmten Anfangsbedingungen ist es möglich, dass sich der Massenpunkt eines Fadenpendels (Länge l, Masse m) auf einer Kreisbahn mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi} = \omega = const.$ bewegt. Das Seil bildet dabei mit der Vertikalen den Winkel $\alpha = const.$



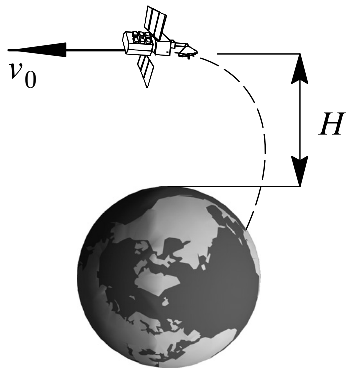
a) Stellen Sie den Impulssatz in Zylinderkoordinaten auf.

b) Wie groß ist die Seilkraft S?

c) Wie schnell muss das Pendel umlaufen?

Aufgabe 6

Ein Satellit wird mit einer Rakete auf eine Höhe von $H = 1200\,\mathrm{km}$ über der Erdoberfläche gebracht und mit einer Horizontalgeschwindigkeit von $v_0 = 7\,\mathrm{km/s}$ entlassen.



a) Welche Exzentrizität hat die sich daran anschließende Bahn? Genügt die Geschwindigkeit für eine Umlaufbahn um die Erde?

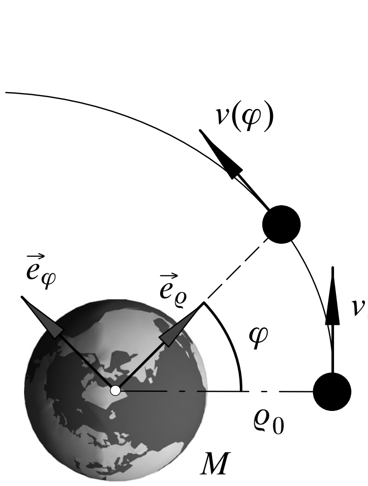
b) Bestimmen Sie die minimale und maximale Höhe über der Erdoberfläche.

c) Welche Geschwindigkeit v_0 würde benötigt, um das Anziehungsfeld der Erde zu verlassen?

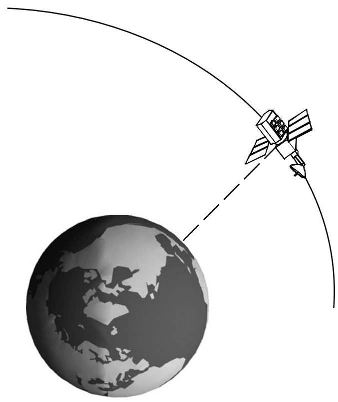
Aufgabe 7

Ein Satellit wird im Abstand ϱ_0 vom Mittelpunkt eines Zentralkörpers der Masse M mit der Tangentialgeschwindigkeit v_0 auf eine Bahn mit der Exzentrizität e gebracht. Zeigen Sie, dass sich die Geschwindigkeit des Satelliten wie folgt berechnet:

$$v(\varphi) = \frac{\gamma M}{\varrho_0 v_0}\sqrt{e^2 + 2e\cos\varphi + 1}\ .$$



Aufgabe 8

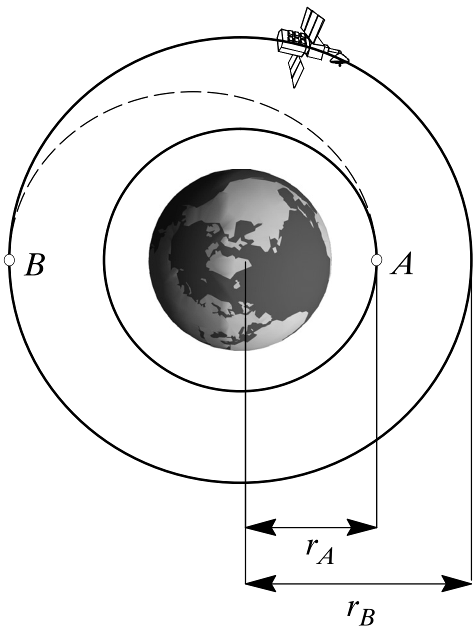


Ein Satellit für Kommunikationsaufgaben soll auf eine geostationäre Bahn gebracht werden, d.h. er soll relativ zur Erde über einem bestimmten Punkt stehen.

a) Von welchem Typ muss die Bahn sein, um die stationäre Erddrehung auszugleichen?

b) Welchen Abstand vom Erdmittelpunkt und welche Geschwindigkeit hat der Satellit?

Aufgabe 9



Ein Satellit auf einer Kreisbahn mit Radius $r_A = 10\,000\ \mathrm{km}$ soll auf eine entferntere Kreisbahn mit Radius $r_B = 15\,000\ \mathrm{km}$ gebracht werden. Dazu werden in den Bahnpunkten A und B Antriebs- und Bremsraketen gezündet, welche die Geschwindigkeit des Satelliten in vernachlässigbar kurzer Zeit verändern können.

a) Welche Exzentrizität hat die Übergangsbahn $A - B$?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_A und v_B auf den Kreisbahnen?

c) Wie groß müssen die Geschwindigkeitsänderungen Δv_A und Δv_B sein, um das Manöver erfolgreich durchzuführen?