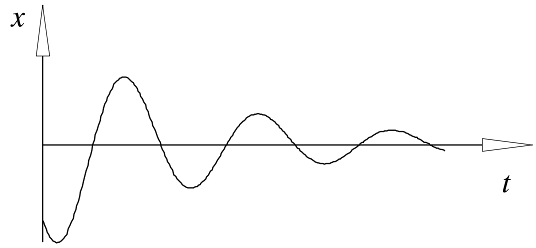
1 Einleitung und Grundlagen

Aufgabe 1

Schwingungen linearer dynamischer Systeme lassen sich durch folgende Zeitfunktionen beschreiben:



a) $x(t) = A \sin\omega t + B \cos\omega t$,

b) $x(t) = C \cos(\omega t - \varphi_0)$,

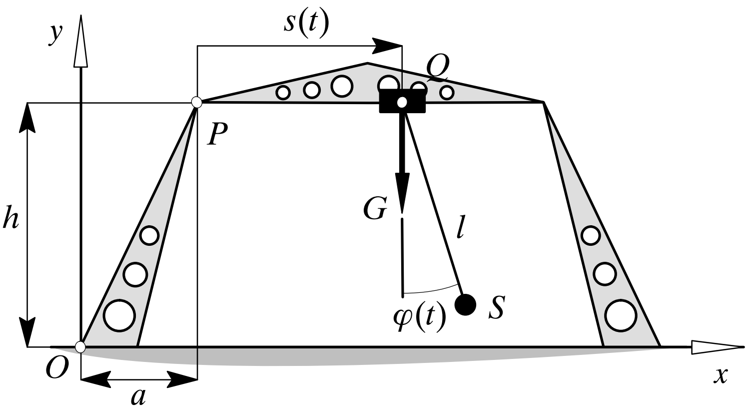
c) $x(t) = Ce^{-\delta t} \cos(\omega t - \varphi_0)$,

d) $x(t) = (At - B)\, e^{-\delta t}$,

wobei A, B, C, δ, ω und φ_0 Konstanten sind. Berechnen Sie jeweils die erste und zweite Ableitung nach der Zeit t.

Aufgabe 2

An einem Portalkran mit bewegter Laufkatze pendelt eine Last.



a) Beschreiben Sie die Vektoren $\boldsymbol{r}_P$, $\boldsymbol{r}_Q$ und $\boldsymbol{r}_S$ vom Koordinatenursprung zu den Punkten P, Q und S im gegebenen Koordinatensystem.

b) Berechnen Sie jeweils die erste und zweite Ableitung dieser Vektoren nach der Zeit t.

c) Beschreiben Sie den Vektor $\vec{G}$ der Gewichtskraft der Laufkatze und bilden Sie die Produkte $\vec{M}_O = \vec{r}_Q \times \vec{G}$ sowie $\boldsymbol{M}_O^T \boldsymbol{r}_Q$ und $\boldsymbol{M}_O^T \boldsymbol{G}$. Welche Eigenschaft des Kreuzprodukts lässt sich daraus ablesen?

Aufgabe 3

Die Drehung eines Körpers lässt sich z.B. durch die Drehmatrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi(t) & -\sin\varphi(t) \\ 0 & \sin\varphi(t) & \cos\varphi(t) \end{bmatrix}$$

beschreiben.

a) Berechnen Sie $\boldsymbol{S}^T$ und $\boldsymbol{S}\,\boldsymbol{S}^T$. Welche Eigenschaft von $\boldsymbol{S}$ lässt sich daraus ablesen? Wie lautet $\boldsymbol{S}^{-1}$?

b) Bestimmen Sie $\dot{\boldsymbol{S}}$ und $\dot{\boldsymbol{S}}\,\boldsymbol{S}^T$. Welche Eigenschaft hat dieses Matrizenprodukt?

Aufgabe 4

Gegeben sind die zeitabhängigen Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} t & 0 & (1+t)^2 \\ 0 & 2 & t \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{bmatrix}.$$

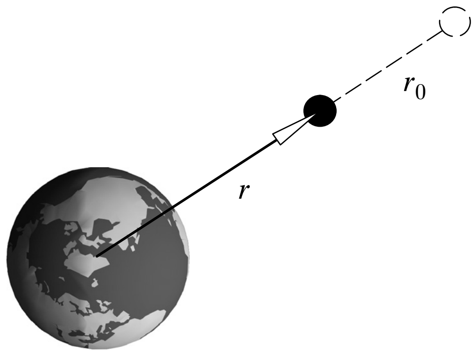
a) Bestimmen Sie $\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{a}^T$, $\tilde{\boldsymbol{a}}$, $\dot{\boldsymbol{A}}$, $\dot{\boldsymbol{a}}$, $\ddot{\boldsymbol{a}}$, $\displaystyle\int_0^t \boldsymbol{a}(\tau)\, d\tau$.

b) Berechnen Sie $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{a}$, $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{a})^T$, $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a}$, $\tilde{\boldsymbol{a}}\,\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}^T\dot{\boldsymbol{a}}$, $\boldsymbol{a}\,\dot{\boldsymbol{a}}^T$, $\dot{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\,\dot{\boldsymbol{A}}$, $d(\boldsymbol{A}^2)/dt$.

Aufgabe 5

Ein Meteorit fällt radial auf die Erde zu und erfährt dabei die Beschleunigung $a(r) = -\gamma m_E/r^2$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{r_0}^{r} a(r)\, dr\ .$$

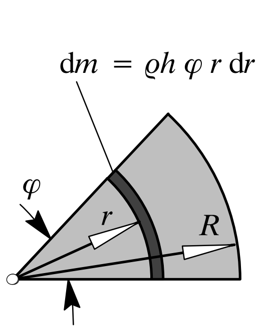


Aufgabe 6

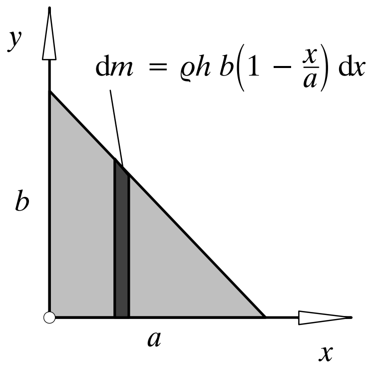
Von den Körpern (konstante Dicke h, Dichte ϱ) sollen die Massen bestimmt werden. Benutzen Sie dazu das bestimmte Integral mit den entspechenden Massenelementen

$$m = \int_V \mathrm{d}m\ .$$

a) Kreis–Segment



b) Dreieck



c) Cosinus–Segment