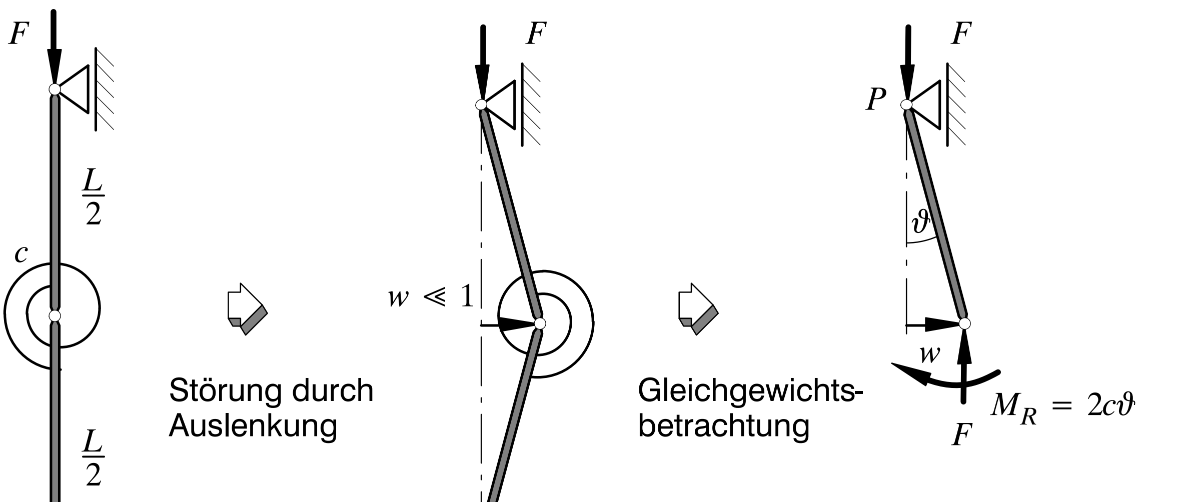
15 Knickung

Die bisherigen Betrachtungen führten jeweils auf einen proportionalen Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung. Dies gilt auch für Stäbe unter Druckspannungen, die dadurch gestaucht werden und versagen, wenn die Druckspannungen die Fließgrenze bzw. Druckfestigkeit überschreiten. Für schlanke Druckstäbe gibt es jedoch noch einen zweiten, häufig kritischeren Versagensmechanismus, das plötzliche Ausknicken durch Instabilität. Diese lässt sich nur verstehen, wenn man die Rückwirkung der Ausbiegung auf die Belastung miteinbezieht. In Abhängigkeit der verschiedenen Randbedingungen erhält man daraus jeweils eine kritische Knicklast, die nicht überschritten werden darf. Durch exzentrischen Angriff der Druckkraft oder Vorkrümmung des Stabes wird diese herabgesetzt.

<u>Vorüberlegung</u>

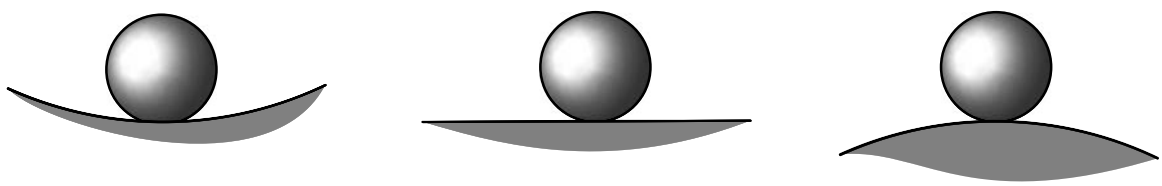


Auslenkmoment $M_A = Fw$

Rückstellmoment $M_R = 2c\vartheta \approx \frac{4c}{L}w$

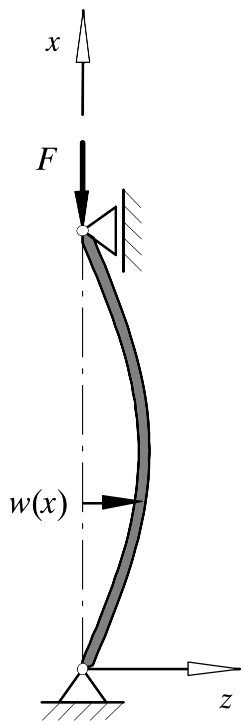
Gleichgewicht $\sum M_P = M_A - M_R = \left(F - \frac{4c}{L}\right)w = 0$

$M_A < M_R$, d.h. $F < \frac{4c}{L}$	$M_A = M_R$, d.h. $F = \frac{4c}{L}$	$M_A > M_R$, d.h. $F > \frac{4c}{L}$
stabiles Gleichgewicht	indifferentes Gleichgewicht	instabiles Gleichgewicht
$w = 0$	w beliebig	$w = 0$



15.1 Knickgleichung

Berücksichtigung der Belastungsänderung von Druckstäben durch Verformung.



Beidseitig gelenkig eingespannter Stab

Differentialgleichung der Biegelinie

$$EI\,w''(x) = -M(x) = -F\,w(x)$$

oder

$$w''(x) + k^2 w(x) = 0 \qquad mit \qquad k^2 = \frac{F}{EI}$$

Allgemeine homogene Lösung

$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$

Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

- $w(0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$
- $w(L) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \sin kL = 0$

$$C_1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad w(x) \equiv 0$$

$$\sin kL = 0, \quad C_1 \; beliebig \quad \Rightarrow \quad w(x) = C_1 \sin kx$$

$$kL = 0\,, \quad \pm\,\pi\,, \quad \pm\,2\pi\,, \ldots$$

kleinste kritische Knicklast

$$k_k^2 = \frac{F_k}{EI} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

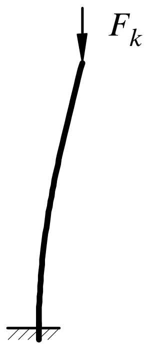
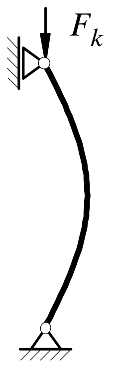
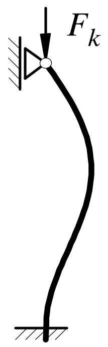
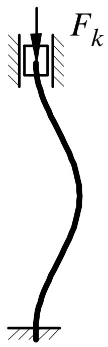
oder

$$F_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

15.2 Verschiedene Knickfälle

Die Knickung kann durch Lagerungen nicht grundsätzlich vermieden werden, die kritische Knicklast lässt sich jedoch durch die Lagerung beinflussen.

Euler'sche Knickfälle

	I	*II*	*III*	*IV*
Lagerung	*fest – frei*	*gelenkig – gelenkig*	*fest – gelenkig*	*fest – fest*
				
krit. Knicklast	$F_k = 0.25\,\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$F_k = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$F_k = 2.046\,\frac{\pi^2 EI}{L^2}$	$F_k = 4\,\frac{\pi^2 EI}{L^2}$

Vorgehen für andere Knickfälle

- Aufstellen der Knickgleichung, Lösen der Differentialgleichung und Einsetzen der Randbedingungen; nichttriviale Lösungen liefern die Knicklast.
- Zurückführen des betrachteten Knickfalls auf obige Fälle.

15.3 Auslegung von Druckstäben

<u>Versagensmöglichkeiten</u>

Nach Einführen der (positiven) mittleren Druckspannung

$$\sigma := \frac{F}{A}$$

erfolgt die Festigkeitsrechnung gegen

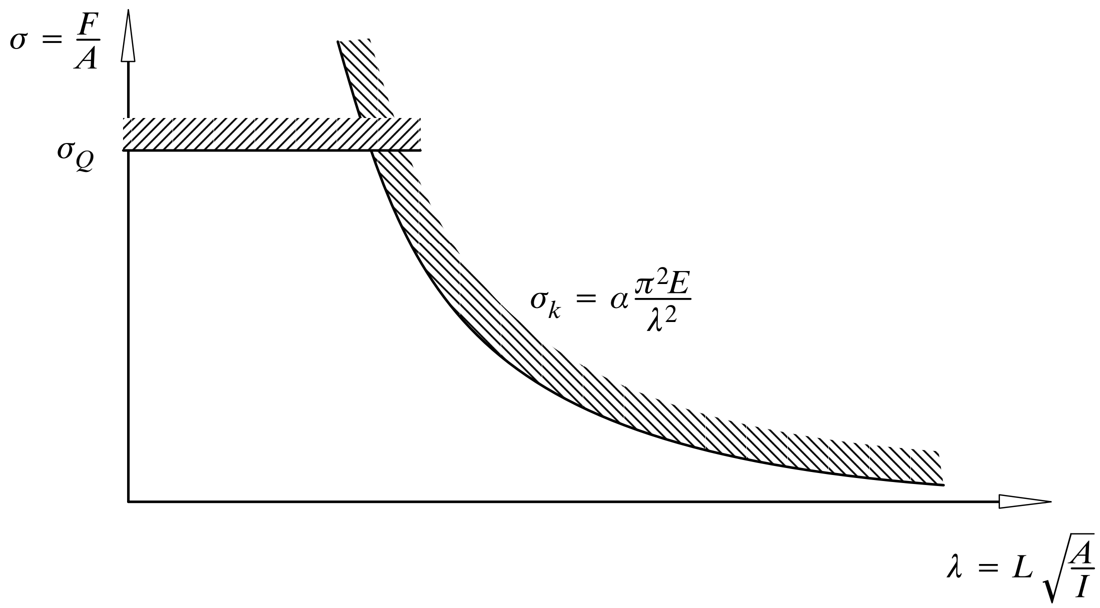
1) Quetschen (plastische Verformung)

$$\sigma \overset{!}{\leq} \sigma_Q$$

2) Knicken (elastische Instabilität)

$$F \overset{!}{\leq} F_k = \alpha\,\frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \Rightarrow \quad \sigma \overset{!}{\leq} \sigma_k := \alpha\,\frac{\pi^2 EI}{AL^2} = \alpha\,\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

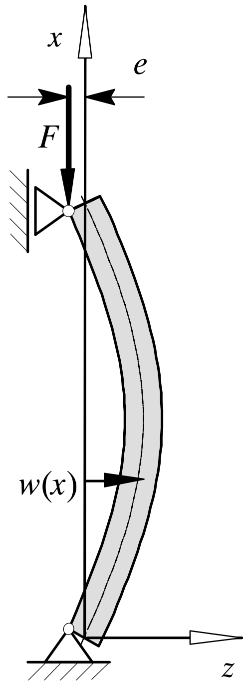
$$\lambda := L\sqrt{\frac{A}{I}}$$ dimensionsloser Schlankheitsgrad



Berücksichtigung von Exzentrizitäten

- Außermittiger Angriffspunkt der Druckkraft
- Vorkrümmung des Druckstabs

Ausbiegung eines beidseitig gelenkig eingespannten Stabs



Differentialgleichung der Biegelinie

$$EI\,w''(x) = -M(x) = -F\,\big(e + w(x)\big)$$

oder

$$w''(x) + k^2\,w(x) = -k^2 e \qquad mit \qquad k^2 = \frac{F}{EI}$$

- allg. homogene Lösung
  $$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx$$
- Partikulärlösung
  $$w(x) = -e$$

allg. Lösung

$$w(x) = C_1 \sin kx + C_2 \cos kx - e$$

Integrationskonstanten aus den Randbedingungen

- $w(0) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = e$
- $w(L) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 \sin kL + e\,(\cos kL - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = e\,\dfrac{1-\cos kL}{\sin kL} = e\,\tan\dfrac{kL}{2}$

Biegelinie

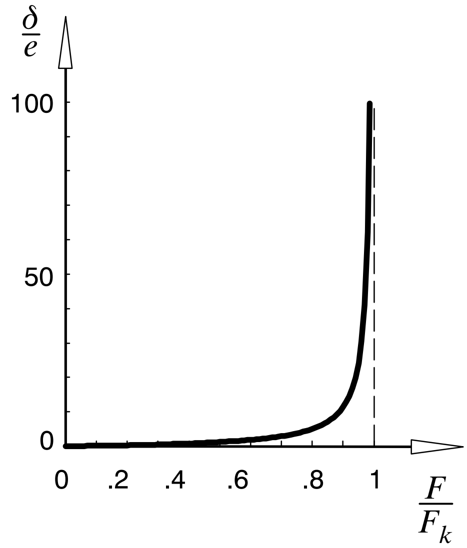
$$w(x) = e\left(\tan\frac{kL}{2}\,\sin kx + \cos kx - 1\right)$$

maximale Ausbiegung δ

$$\delta = w(L/2) = e\left(\tan\frac{kL}{2}\,\sin\frac{kL}{2} + \cos\frac{kL}{2} - 1\right) = e\left(\frac{1}{\cos kL/2} - 1\right)$$

$$k^2 = \frac{F}{EI} = \frac{F_k}{EI}\,\frac{F}{F_k} = \frac{\pi^2}{L^2}\,\frac{F}{F_k}$$

$$\delta = e\left[\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{F}{F_k}}} - 1\right]$$



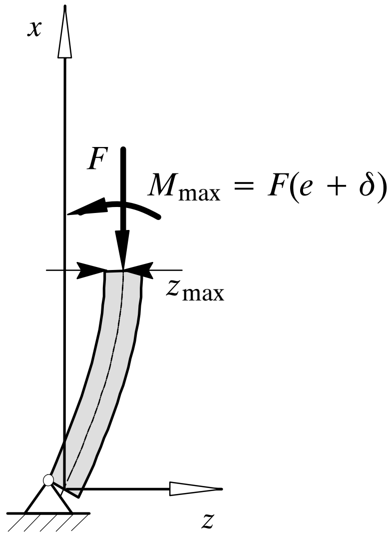
maximale Druckspannung in einem beidseitig gelenkig eingespannten Stab

Superposition

$$\sigma_{\max} = \sigma_{Biegung,max} + \sigma_{Druck}$$

$$\sigma_{Druck} = \frac{F}{A}$$

$$\sigma_{Biegung,max} = \frac{M_{\max} z_{\max}}{I} = \frac{F z_{\max}}{I}(e + \delta) = \frac{F e z_{\max}}{I} \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{F}{F_k}}}$$



$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A}\left[1 + \frac{A e z_{\max}}{I} \frac{1}{\cos\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{F}{EA}}}\right]$$

Festigkeitsrechnung gegen Quetschen (plastische Verformung)

$$\sigma_{\max} \overset{!}{\leq} \sigma_Q$$