

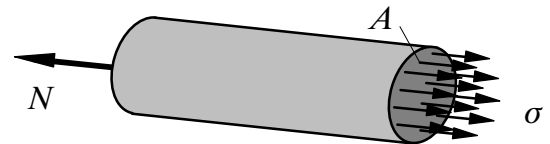
14 Überlagerung einfacher Belastungsfälle

Die bisher betrachteten speziellen Belastungsfälle treten in der Technik i. Allg. nicht in reiner Form auf, sondern überlagern sich. Da die auftretenden Verformungen klein sind und ein linearer Zusammenhang zwischen Verformung und Belastung vorausgesetzt wird, dürfen nach dem Superpositionsprinzip die aus den einzelnen Belastungsfällen resultierenden Spannungen ebenfalls überlagert werden. Dabei entsteht meist ein mehrachsiger Spannungszustand, der für die Festigkeitsberechnung auf eine einachsige Vergleichsspannung zurückgeführt werden muss. Zwei der wichtigsten Hypothesen dafür sind die Normalspannungshypothese für Gewaltbruch und die Schubspannungshypothese für Fließbruch.

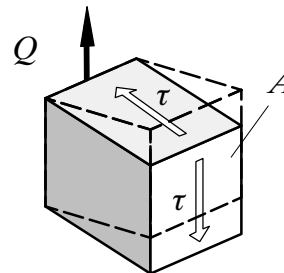
Eine spezielle Art der Überlagerung ist die Biegebelastung schräg zu den Hauptachsen des Querschnitts. Diese schiefe Biegung kann als Überlagerung zweier Biegungen um die Hauptachsen betrachtet werden, die mit dem bereits bekannten Vorgehen berechnet werden können. Eine Überlagerung von Zug/Druck und Biegung entsteht bei exzentrischer Axialbelastung. Greift dabei eine Druckkraft im Kern des Querschnitts an, entstehen lediglich Druckspannungen, was insbesondere für keramische Werkstoffe vorteilhaft ist.

Einfache Belastungsfälle

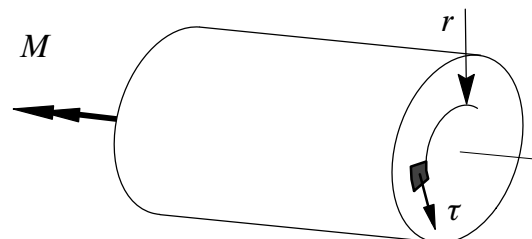
- Zug/Druck: $\sigma = \frac{N}{A}$



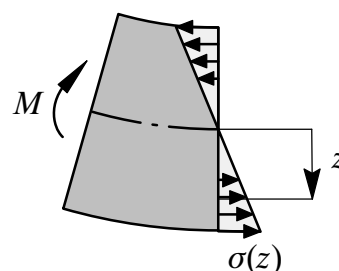
- Schub: $\tau = \frac{Q}{A}$



- Torsion: $\tau = \frac{M}{I_p} r$



- Biegung: $\sigma = \frac{M}{I_y} z$





14.1 Superpositionsprinzip und Festigkeitshypothesen

Superpositionsprinzip

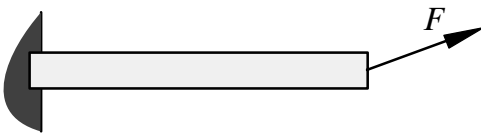
Auf Grund der betrachteten kleinen Verformungen und der linearen Beziehungen zwischen Spannungen und Dehnungen (Hooke'sches Gesetz) kann die Lösung für eine allgemeine Belastung durch Überlagerung von Einzellösungen gefunden werden:

$$\sigma_{\text{gesamt}} = \sigma_{\text{Zug}} + \sigma_{\text{Biegung}}$$

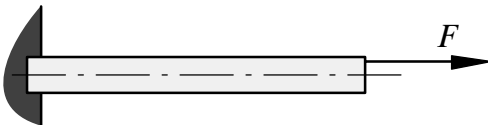
$$\tau_{\text{gesamt}} = \tau_{\text{Schub}} + \tau_{\text{Torsion}}$$

Beispiele für Überlagerungen

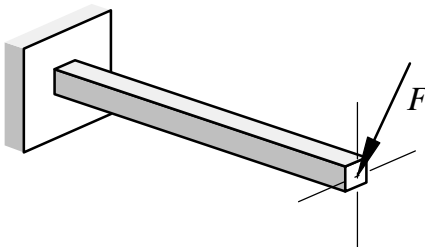
- *schräger Zug/Druck*



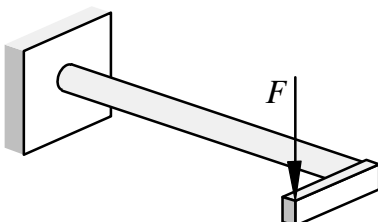
- *exzentrischer Zug/Druck*



- *schiefe Biegung*



- *exzentrische Querkraft*



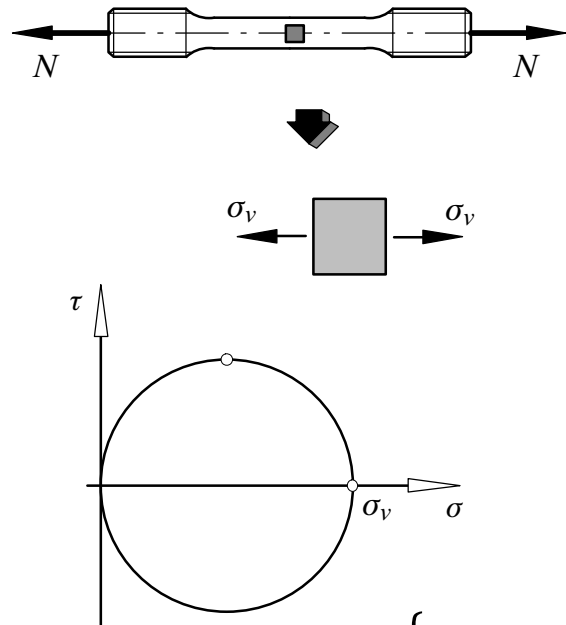
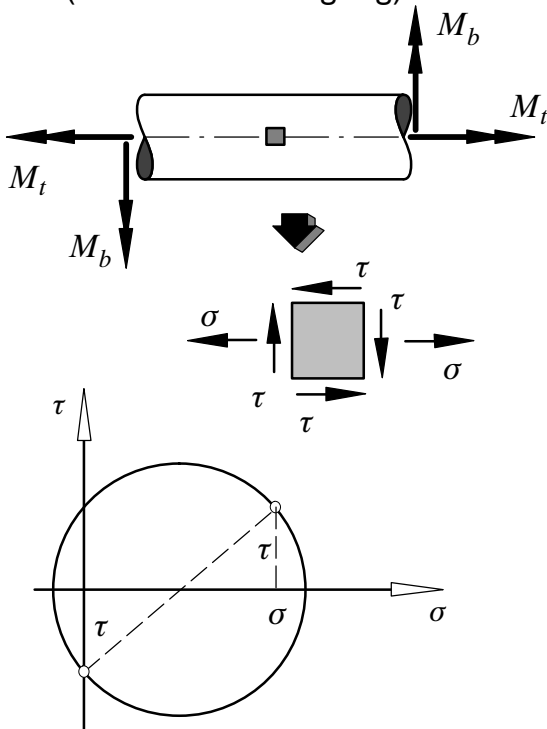
Festigkeitshypothesen

Die Festigkeitsberechnung basiert auf einem Vergleich zwischen

mehrachsigter Beanspruchung
(z.B. Torsion+Biegung)

und

einachsigen Werkstoffkennwert K
(z.B. Zugversuch)



Versagen $\sigma_v = K = \begin{cases} R_e & \text{Fließen} \\ R_m & \text{Bruch} \end{cases}$

Festigkeitsbedingung $\sigma_v \leq \sigma_{zul} = \frac{K}{S}$

Die Vergleichsspannung σ_v der mehrachsigen Beanspruchung, welche das Material gleich stark belastet wie der äquivalente einachsige Zug, ergibt sich aus Annahmen über den Versagensmechanismus:

- Normalspannungshypothese (NH): Versagen aufgrund der größten Normalspannung

$$\rightarrow \sigma_v = \sigma_{\max} \quad 1. \text{ Hauptspannung}$$

Anwendung: Trennbruch bei sprödem Material und stoßartig beanspruchtem zähem Material (maßgeblicher Werkstoffkennwert $K = R_m$)

- Schubspannungshypothese (SH): Versagen aufgrund der größten Schubspannung

$$\rightarrow \tau_{\max} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \stackrel{!}{=} \frac{\sigma_v}{2}$$

$$\rightarrow \sigma_v = 2 \tau_{\max} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

Anwendung: Fließen von zähem Material (maßgeblicher Werkstoffkennwert $K = R_e$)

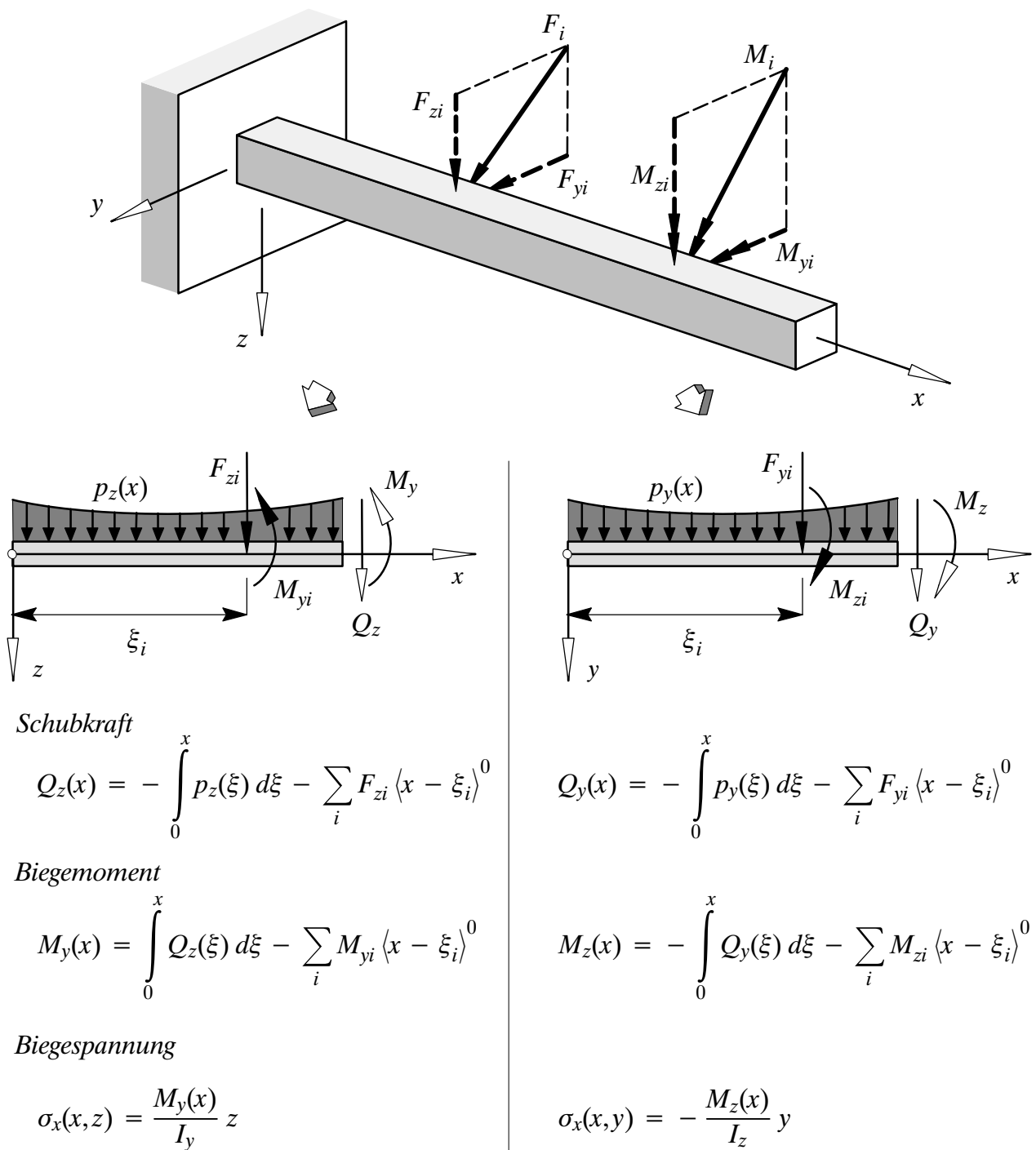


14.2 Schiefe Biegung

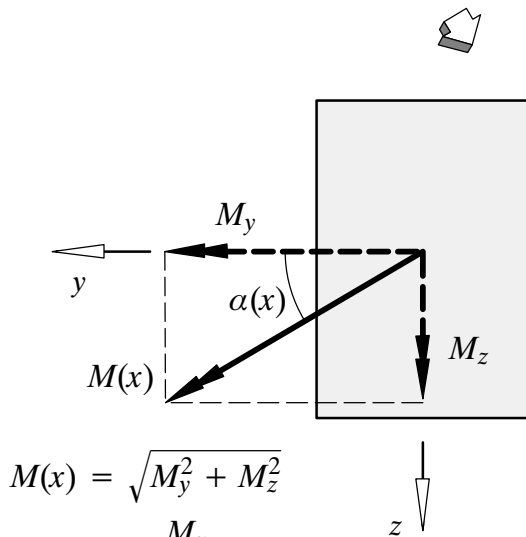
Annahme

Prismatischer Balken mit y - und z -Achse als Hauptachsen des Querschnitts.

Zerlegung der schiefen Biegung in zwei gerade Biegebeanspruchungen



Überlagerung



$$M(x) = \sqrt{M_y^2 + M_z^2}$$

$$\tan \alpha(x) = \frac{M_z}{M_y}$$

Biegespannungen:

$$\sigma_x(x, y, z) = \frac{M_y(x)}{I_y} z - \frac{M_z(x)}{I_z} y$$

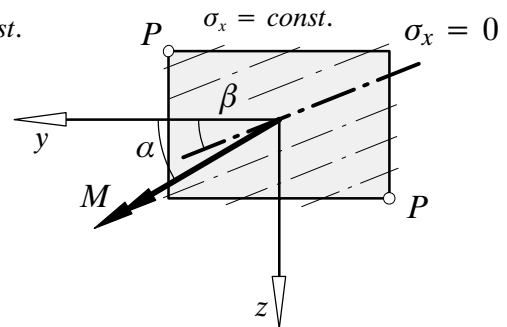
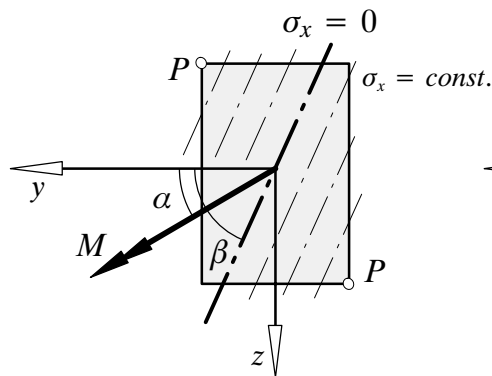
neutrale Faser:

$$\sigma_x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow z = \frac{M_z}{M_y} \frac{I_y}{I_z} y = \underbrace{\left(\frac{I_y}{I_z} \tan \alpha \right)}_{\tan \beta} y$$

für positive Biegemomente gilt:

$$I_y > I_z \Rightarrow \beta > \alpha$$

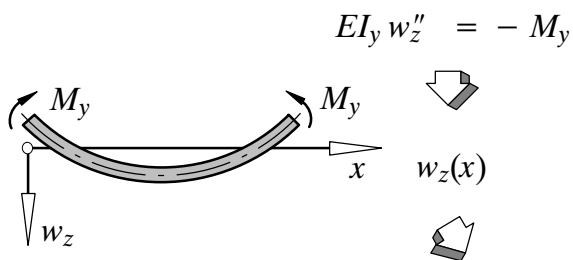
$$I_y < I_z \Rightarrow \beta < \alpha$$



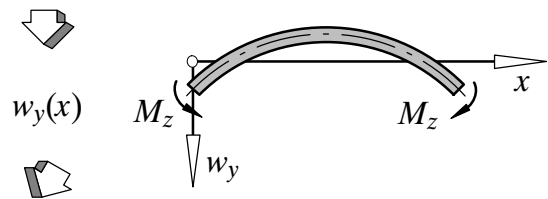
kritischer Punkt P : max. Abstand von der neutralen Faser, $\sigma_{\max} = \sigma_x(y_P, z_P)$

Balkendurchbiegung

Differentialgleichungen



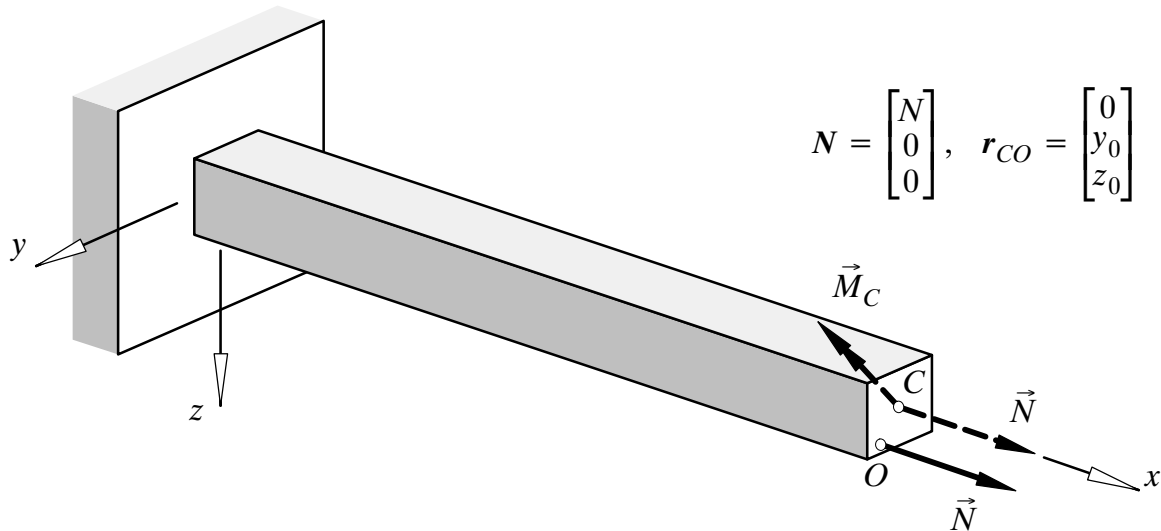
$$EI_z w_y'' = M_z$$



$$\text{Gesamtdurchbiegung } w(x) = \sqrt{w_y^2 + w_z^2}$$



14.3 Exzentrische Axialbelastung



Äquivalenz

$$\{\vec{N}, \vec{M}_O = \vec{0}\} \sim \{\vec{N}, \vec{M}_C\} \quad \text{mit} \quad \vec{M}_C = \vec{r}_{OC} \times \vec{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ z_0 N \\ -y_0 N \end{bmatrix}$$

Biegespannungen

$$\sigma_x(y, z) = \frac{N}{A} + \frac{y_0 N}{I_z} y + \frac{z_0 N}{I_y} z$$

neutrale Faser: $\sigma_x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow z = -\frac{I_y}{Az_0} - \frac{y_0 I_y}{z_0 I_z} y$

Kern des Querschnitts:

Angriffspunkte O der Axialkraft N , für die die Normalspannungen im gesamten Querschnitt gleiches Vorzeichen haben (neutrale Faser liegt außerhalb des Querschnitts)

Wichtig für Werkstoffe wie Stein, Beton und Keramik, die nur geringe Zugspannungen ertragen können: Druckkräfte erzeugen nur Druckspannungen, falls sie im Kern des Querschnitts angreifen!

