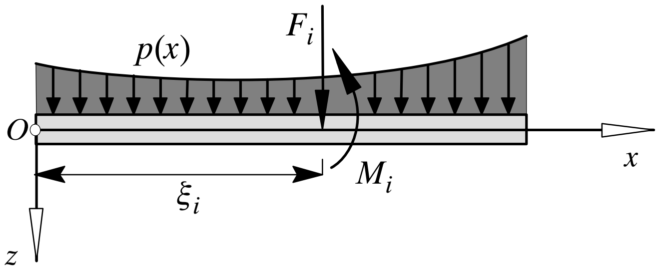
13 Biegelinie

Neben dem Versagen eines Bauteils auf Grund zu hoher Spannungen sind häufig auch die Verformungen bei der Auslegung zu berücksichtigen. Dabei sind insbesondere die Durchbiegungen von Getriebe- oder Rotorwellen von Bedeutung, da diese den Zahneingriff verändern bzw. zum Anstreifen des Rotors führen können.

Bereits aus der Spannungsberechnung ist bekannt, dass Biegemomente einen Balken krümmen. Diese Krümmungen lassen sich für kleine Durchbiegungen auf zweite Ableitungen der Auslenkungen zurückführen, woraus sich Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Biegelinie ergeben. Bei der Integration entstehen zwei Integrationskonstanten, die über die Lagerung des Balkens festgelegt sind. In einfachen Fällen sind die Biegelinien in Handbüchern des Maschinenbaus tabelliert. Lässt sich die zu untersuchende Belastung auf diese einfachen Fälle zurückführen, kann die Durchbiegung auch direkt durch Superposition gefunden werden.

13.1 Differentialgleichung der Biegelinie

Annahmen



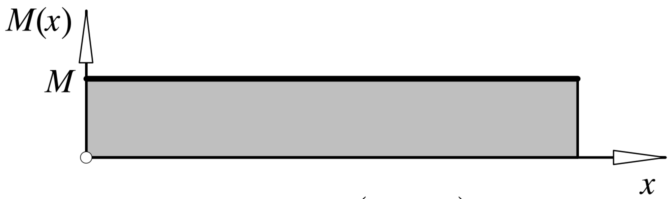
- Belastung des Balkens in Richtung einer Hauptachse des Querschnitts
- aus Stereostatik bereits bekannt:

Streckenlast $\quad p(x)$

Querkraftverlauf $\quad Q(x) = -\int_0^x p(\xi)\, d\xi - \sum_i F_i \langle x - \xi_i \rangle^0$

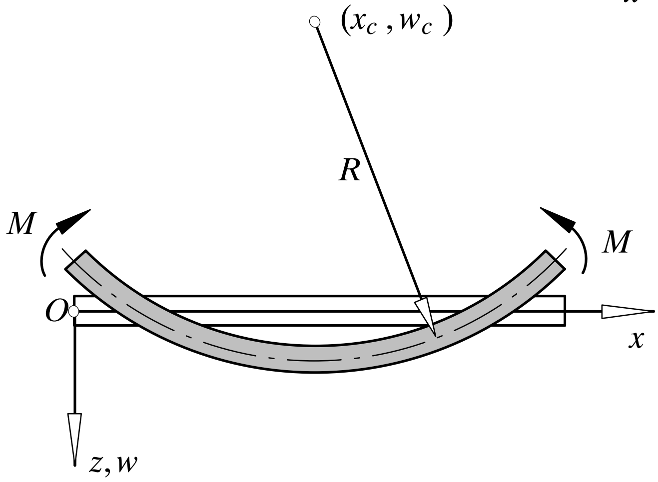
Momentenverlauf $\quad M(x) = \int_0^x Q(\xi)\, d\xi - \sum_i M_i \langle x - \xi_i \rangle^0$

Reine Biegung: $M_y(x) = M = const.$



Ergebnis des Momentengleichgewichts:

$$\frac{E}{R} = \frac{M}{I_y} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{EI_y}$$



Kreisbeziehungen:

$$(x - x_c)^2 + (w - w_c)^2 = R^2 \qquad (1)$$

durch Differentiation bez. x:

$$2(x - x_c) + 2(w - w_c)\, w' = 0 \qquad (2)$$

$$2 + 2w'^2 + 2(w - w_c)\, w'' = 0 \qquad (3)$$

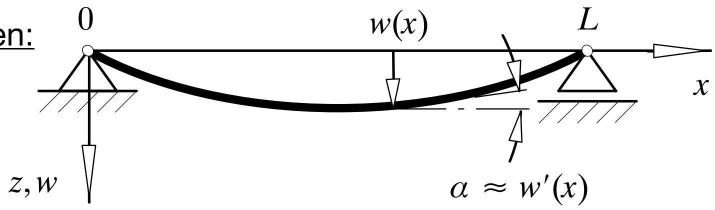
aus (3): $(w - w_c) = -\dfrac{1 + w'^2}{w''}$

(2): $(x - x_c) = w' \dfrac{1 + w'^2}{w''}$

(1): $R^2 = \left(w'^2 + 1\right)\left(\dfrac{1 + w'^2}{w''}\right)^2 = \dfrac{\left(1 + w'^2\right)^3}{w''^2} \quad \Rightarrow \quad R = (\pm)\dfrac{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}}{w''}$

$$\frac{w''}{\left(1 + w'^2\right)^{3/2}} = -\frac{M}{EI_y}$$

Vereinfachung für kleine Durchbiegungen:



Annahme: kleine Durchbiegungen

$$w \ll L$$

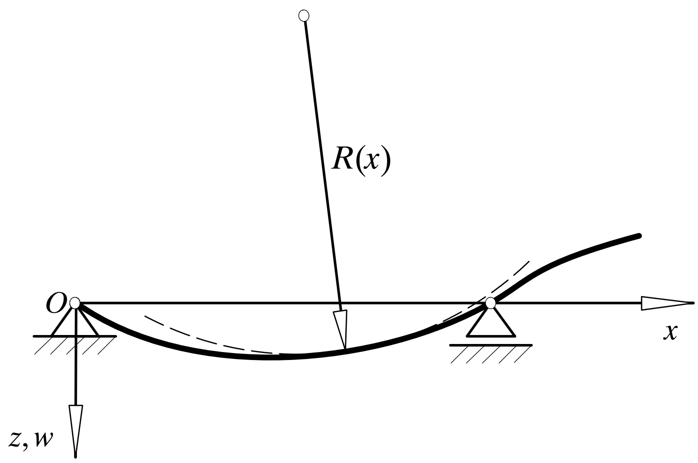
$$\Rightarrow w' = \frac{dw}{dx} \ll 1$$

Damit vereinfacht sich die Differentialgleichung der Biegelinie zu

$$\boxed{EI_y\, w'' = -M}$$

Gerade Biegung: $M_y = M(x) \neq const.$

Im Falle der geraden Biegung lässt sich die Biegelinie jeweils lokal durch einen Krümmungskreis annähern. Daher lässt sich das Ergebnis der reinen Biegung auf die gerade Biegung übertragen:



$$\boxed{\underbrace{EI_y}_{\text{Biegesteifigkeit}}\, w''(x) = -M(x)}$$

Differentialgleichung der Biegelinie
(Biegelinie−Momenten−Beziehung)

13.2 Berechnung der Biegelinie

Allgemeines Vorgehen zur Ermittlung der Biegelinie

1) Berechnung des Biegemomentenverlaufs $M(x)$ entsprechend dem Vorgehen zur Berechnung innerer Belastungen (Föppl–Notation empfehlenswert!)

   Anmerkung: Im Falle statisch unbestimmter Probleme, können unbekannte Reaktionskräfte verbleiben.

2) Lösung der Differentialgleichung

$$EI_y\, w''(x) = -M(x)$$

   für $w(x)$ durch sukzessive Integration bez. x, wobei zwei Integrationskonstanten entstehen, z.B. C_1 und C_2.

3) Bestimmung der Integrationskonstanten C_1, C_2 sowie redundanter Reaktionen aus Rand- und Übergangsbedingungen.

4) Bestimmung der maximalen Durchbiegungen entweder an den Rändern ($w(0)$ oder $w(L)$) oder als lokale Maxima $w(x^*)$ mit $w'(x^*) = 0$.

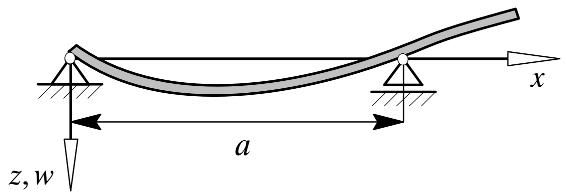
Bemerkung: Anstelle der Biegelinie–Momenten–Beziehung können auch folgende Gleichungen benutzt werden:

Querkraftbeziehung: $EI_y\, w'''(x) = -M'(x) = -Q(x)$

Linienlast: $EI_y\, w^{IV}(x) = -Q'(x) = p(x)$

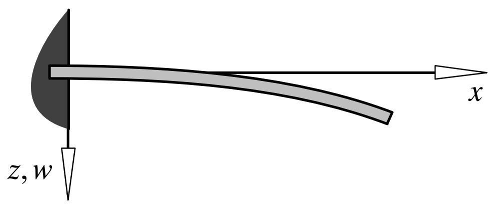
Rand- und Übergangsbedingungen

- *Randbedingungen:* Einschränkung der Durchbiegung und/oder deren Ableitung durch Lager, z.B.



$w(0) = 0$

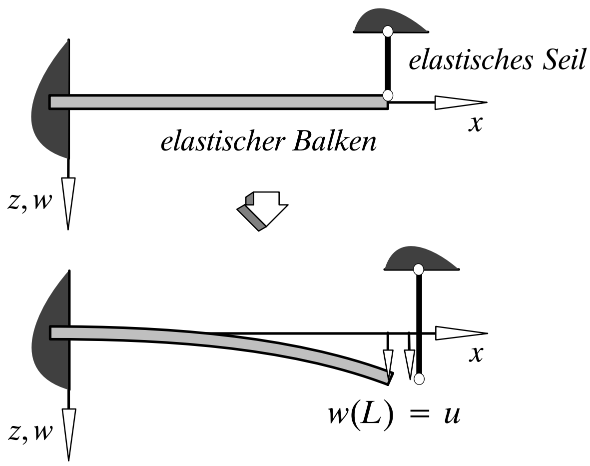
$w(a) = 0$



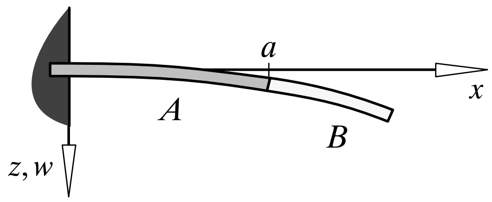
$w(0) = 0$

$w'(0) = 0$

- *Kompatibilitätsbedingungen:* Verträglichkeitsbedingungen zwischen elastischen Bauteilen, z.B.



- *Kontinuitätsbedingungen:* Übergangsbedingungen zwischen verschiedenen Abschnitten des Balkens, z.B.



$$w_A(a) = w_B(a)$$
$$w'_A(a) = w'_B(a)$$

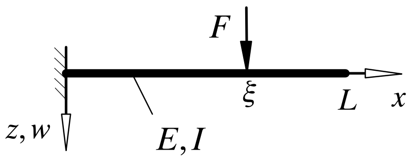
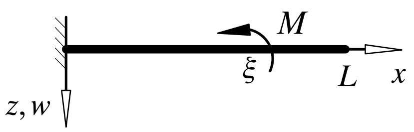
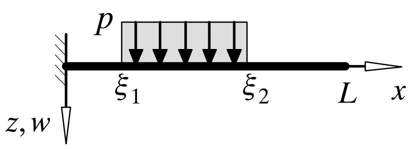
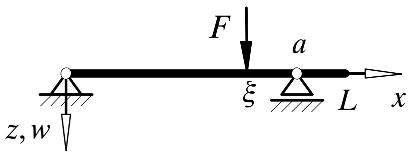
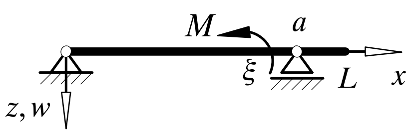
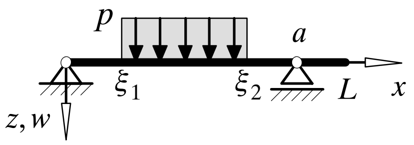
13.3 Superpositionsmethode

Superpositionsprinzip

Lässt sich eine Belastung $M(x)$ in Teilbelastungen $M_i(x)$ zerlegen, deren zugehörige Biegelinien $w_i(x)$ bekannt sind, dann berechnet sich die Gesamtdurchbiegung als Summe der Teilbiegungen:

$$M(x) = \sum_i M_i(x) \quad \Rightarrow \quad w(x) = \sum_i w_i(x)$$

Einfache Belastungsfälle für statisch bestimmte Balken

Belastung	Biegelinie
	$w(x) = \frac{F}{6EI}\left[3\xi x^2 - x^3 + \langle x - \xi\rangle^3\right]$
	$w(x) = \frac{M}{2EI}\left[-x^2 + \langle x - \xi\rangle^2\right]$
	$w(x) = \frac{p}{24EI}\left[6\left(\xi_2^2 - \xi_1^2\right)x^2 - 4\left(\xi_2 - \xi_1\right)x^3 + \langle x - \xi_1\rangle^4 - \langle x - \xi_2\rangle^4\right]$
	$w(x) = \frac{F}{6aEI}\left[(a - \xi)\left(a^2x - x^3\right) - x\langle a - \xi\rangle^3 + a\langle x - \xi\rangle^3 - \xi\langle x - a\rangle^3\right]$
	$w(x) = \frac{M}{6aEI}\left[a^2x - x^3 - 3x\langle a - \xi\rangle^2 + 3a\langle x - \xi\rangle^2 + \langle x - a\rangle^3\right]$
	$w(x) = \frac{p}{24aEI}\left[2\left(\xi_2^2 - \xi_1^2 - 2a(\xi_2 - \xi_1)\right)\left(x^3 - a^2x\right) - x\langle a - \xi_1\rangle^4 + x\langle a - \xi_2\rangle^4 + a\langle x - \xi_1\rangle^4 - a\langle x - \xi_2\rangle^4 - 2\left(\xi_2^2 - \xi_1^2\right)\langle x - a\rangle^3\right]$

Weitere Belastungsfälle s. Handbücher des Maschinenbaus, z.B. DUBBEL oder Hütte