

## 12 Technische Biegelehre

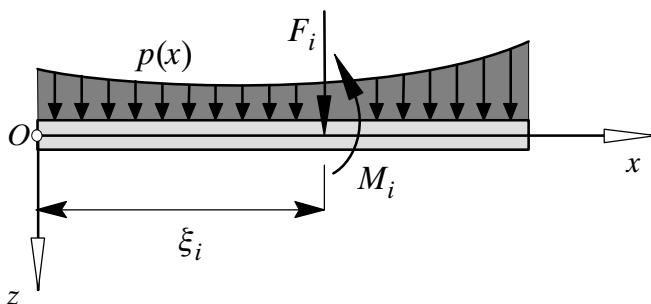
Die Biegung ist ein wichtiger und für querbelastete schlanke Bauteile wie Wellen, Achsen und Balken häufig kritischer Belastungsfall. Die dadurch entstehenden Spannungen überwiegen i. Allg. die durch andere Beanspruchungen entstehenden Belastungen.

Maßgeblich für die Biegung sind Momente um die Querachse, die bereits aus der Stereostatik bekannt sind. Diese krümmen den Balken und dehnen dabei die äußeren Fasern, die inneren Fasern werden gestaucht. Die daraus entstehenden Zug- und Druckspannungen halten dem Biegemoment das Gleichgewicht. Der Spannungsverlauf ist linear über dem Querschnitt, die maximalen Spannungen entstehen in den Randfasern.

Eine entscheidende Größe für den Widerstand eines Balkens gegen Biegung ist das Flächenträgheitsmoment seines Querschnitts. Dies ist eine integrale Größe, welche die Flächenteile quadratisch mit dem Abstand von der neutralen Faser gewichtet. Für einfache Geometrien ist sie aus Tabellen ablesbar, für zusammengesetzte Flächen kann sie durch Summation berechnet werden.

Man unterscheidet die reine Biegung, die durch Randmomente erzeugt wird, und die gerade Biegung, die durch Querkräfte entsteht. Die bei letzterer zusätzlich auftretenden Schubspannungen können für schlanke Balken gegenüber den Biegespannungen vernachlässigt werden.

### Innere Balkenbelastung



*Streckenlast*  $p(x)$

*Querkraftverlauf*

$$Q(x) = - \int_0^x p(\xi) d\xi - \sum_i F_i \langle x - \xi_i \rangle^0$$

*Biegemomentenverlauf*

$$M(x) = \int_0^x Q(\xi) d\xi - \sum_i M_i \langle x - \xi_i \rangle^0$$



innere Spannungen und Verformungen in Abhängigkeit von  $M(x)$ , den Materialeigenschaften und den Flächenträgheitsmomenten



## 12.1 Flächenträgheitsmomente

### Integrale Flächeneigenschaften

- Fläche

$$A = \int_A dA$$

- Flächenmittelpunkt

$$y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA$$

$$z_C = \frac{1}{A} \int_A z dA$$

- Flächenträgheitsmomente

$$I_y = \int_A z^2 dA$$

$$I_z = \int_A y^2 dA$$

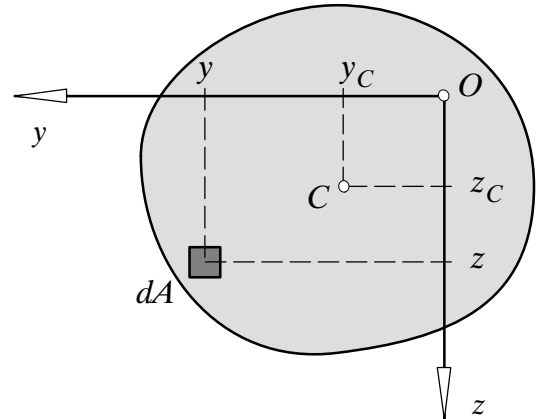
$$I_{yz} = - \int_A yz dA$$

$$I_p = \int_A r^2 dA = I_y + I_z$$

axiales  
Flächenträgheitsmoment

Deviationsmoment

polares  
Flächenträgheitsmoment



### Flächenträgheitsmomente für einfache Geometrien

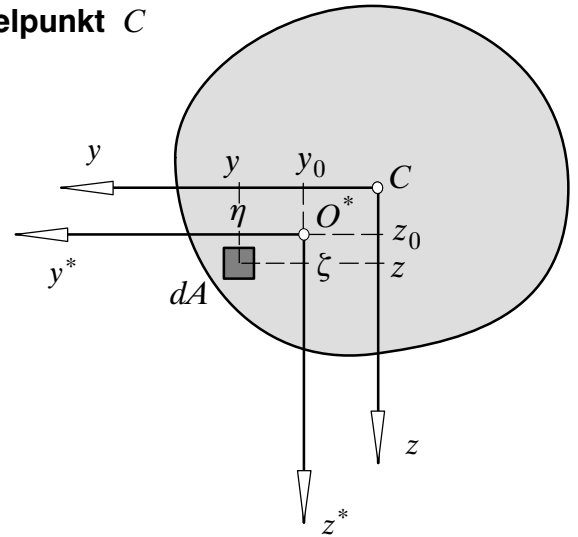
Rechteck	gleichschenkliges Dreieck	regelmäßiges Sechseck
$I_y = \frac{ab^3}{12}$ $I_z = \frac{ba^3}{12}$	$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{48}$	$I_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} a^4$ $I_z = I_y$
Kreis	Ellipse	Kreisring
$I_y = \frac{\pi r^4}{4}$ $I_z = I_y$	$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_z = \frac{\pi a b^3}{4}$	$I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$ $I_z = I_y$

alle Angaben beziehen sich auf Hauptträgheitsachsen ( $I_{yz} = 0$ ) durch den Flächenmittelpunkt

## Transformationsgesetze für Flächenträgheitsmomente

### 1) Achsenverschiebung relativ zum **Flächenmittelpunkt** $C$

$$\begin{aligned}
 \text{z.B. } I_y^* &= \int_A \xi^2 dA = \int_A (z - z_0)^2 dA \\
 &= \int_A z^2 dA - 2z_0 \int_A z dA + z_0^2 \int_A dA \\
 &= I_y + z_0^2 A
 \end{aligned}$$



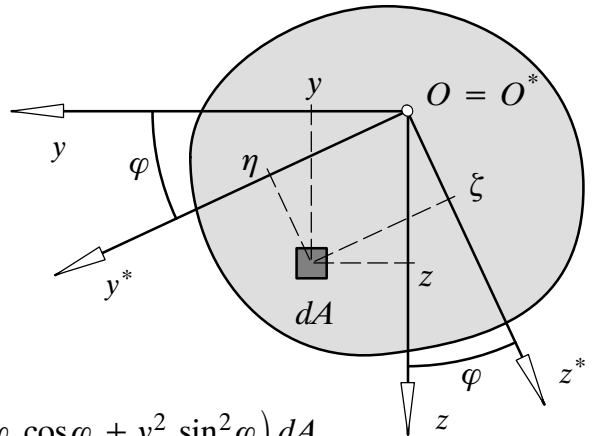
$$\begin{aligned}
 I_y^* &= I_y + z_0^2 A \\
 I_z^* &= I_z + y_0^2 A \\
 I_{yz}^* &= I_{yz} - y_0 z_0 A \\
 I_p^* &= I_p + (y_0^2 + z_0^2) A
 \end{aligned}$$

Huygens–Steiner Beziehungen

### 2) Achsenverdrehung

$$\begin{aligned}
 \eta &= y \cos \varphi + z \sin \varphi \\
 \xi &= z \cos \varphi - y \sin \varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin^2 \varphi &= (1 - \cos 2\varphi)/2 \\
 \cos^2 \varphi &= (1 + \cos 2\varphi)/2 \\
 \sin \varphi \cos \varphi &= (\sin 2\varphi)/2
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \text{z.B. } I_y^* &= \int_A \xi^2 dA = \int_A (z^2 \cos^2 \varphi - 2yz \sin \varphi \cos \varphi + y^2 \sin^2 \varphi) dA \\
 &= \int_A \left( \frac{z^2 + y^2}{2} + \frac{z^2 - y^2}{2} \cos 2\varphi - yz \sin 2\varphi \right) dA \\
 &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y^* &= \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi + I_{yz} \sin 2\varphi \\
 I_z^* &= \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\varphi - I_{yz} \sin 2\varphi \\
 I_{yz}^* &= -\frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\varphi + I_{yz} \cos 2\varphi \\
 I_p^* &= I_y^* + I_z^* = I_y + I_z = I_p \quad (\text{invariant})
 \end{aligned}$$



## Hauptachsen

$$\text{Bedingung: } I_{yz}^* = 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\varphi = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$$

$$\Rightarrow I_{1,2} = I_{y,z}^* = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\frac{(I_y - I_z)^2}{4} + I_{yz}^2}$$

Hauptträgheitsmomente (min./max.)

speziell: Symmetrieachsen und dazu senkrechte Achsen sind Haupt(trägheits)achsen

## Zusammengesetzte Flächen

Zerlegung einer Fläche in disjunkte Bereiche:

$$A = \bigcup_i A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \text{ für } i \neq j$$



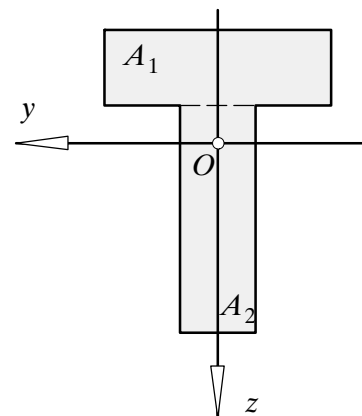
Aufspalten der Integration

$$\text{z.B. } I_{Oy} = \int_{\bigcup A_i} z^2 dA = \sum_i \int_{A_i} z^2 dA = \sum_i I_{Oyi}$$



$$\begin{aligned} I_{Oy} &= \sum_i I_{Oyi} \\ I_{Oz} &= \sum_i I_{Ozi} \\ I_{Oyz} &= \sum_i I_{Oyzi} \end{aligned}$$

Beachte gemeinsamen Bezugspunkt  $O$  für alle Summanden!  
(ggf. Huygens-Steiner Beziehungen anwenden)

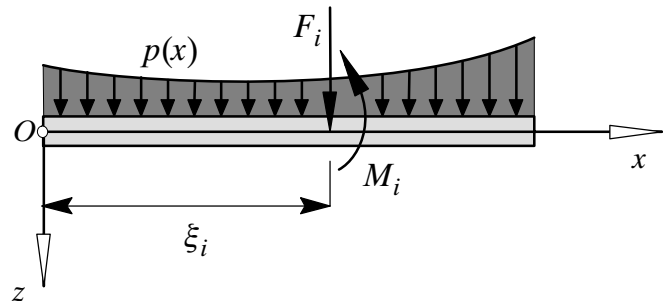


## 12.2 Biegespannung und -dehnung

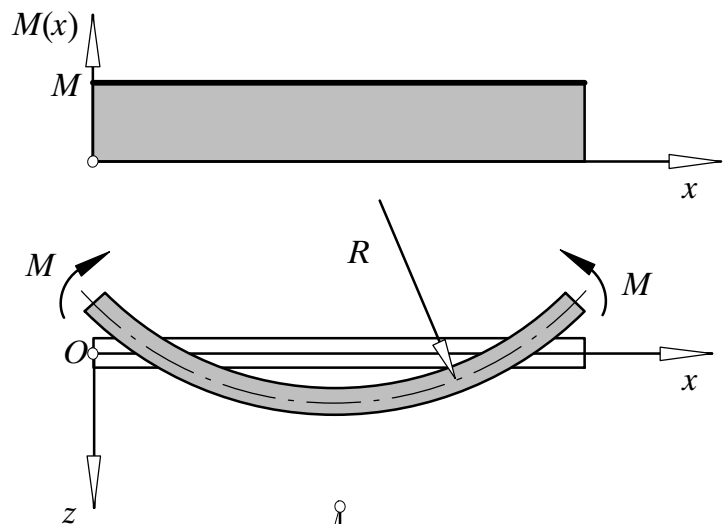
### Allgemeine Annahmen

- Balken ist symmetrisch zur  $xz$ -Ebene ( $y$ -Achse ist Hauptachse des Querschnitts)
- $x$ -Achse verläuft durch Flächenmittelpunkt des Querschnitts
- Alle Belastungen liegen in der  $xz$ -Ebene

⇒ Durchbiegungen liegen in der  $xz$ -Ebene (Biegebene)



**Reine Biegung:**  $M_y(x) = M = \text{const.}$



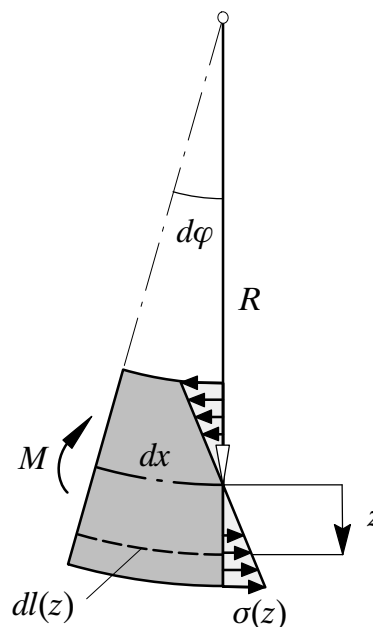
Dehnungen:

$$\begin{aligned} dl(z) &= (R + z) d\varphi \\ &= R d\varphi + \frac{z}{R} R d\varphi \\ &= dx + \frac{z}{R} dx \end{aligned}$$

$$\varepsilon(z) = \frac{dl(z) - dx}{dx} = \frac{z}{R}$$

Spannungen: Hooke'sches Gesetz

$$\sigma(z) = E \varepsilon(z) \equiv \frac{E}{R} z$$





Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum F_x = \int_A \sigma dA = \frac{E}{R} \int_A z dA \equiv \frac{E}{R} z_C A \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow z_C = 0 \quad \text{neutrale Faser verläuft durch Flächenmittelpunkt}$$

$$\sum M_y = -M + \int_A z \sigma dA = -M + \frac{E}{R} \int_A z^2 dA = 0$$

$$\Rightarrow \frac{E}{R} = \frac{M}{I_y}$$

Zusammenfassend ergibt sich für die Normalspannungen und -dehnungen:

$$\sigma(z) = \frac{M}{I_y} z \quad \Rightarrow \quad |\sigma_{\max}| = \frac{|z|_{\max}}{I_y} |M| = \frac{|M|}{W_y}$$

$$\varepsilon(z) = \frac{M}{EI_y} z$$

Das Verhältnis  $W_y = I_y/|z|_{\max}$  bezeichnet man als Widerstandsmoment des Querschnitts.

**Gerade Biegung:**  $M_y = M(x) \neq \text{const.}$

Idealisierung: Bei schlanken Balken hat die Querkraft  $Q = dM/dx$  nur geringen Einfluss auf die Verwölbung der Querschnitte. Daher ist die Annahme gerechtfertigt, dass ebene Querschnitte senkrecht zur Mittellinie eben und senkrecht zur neutralen Faser bleiben (Bernoulli-Hypothese).

$\Rightarrow$  Die Ergebnisse der reinen Biegung lassen sich übertragen:

$$\sigma(x, z) = \frac{M(x)}{I_y} z$$

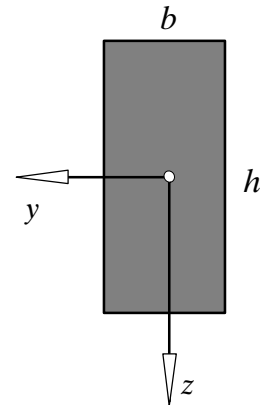
$\Rightarrow$  kritischer Querschnitt eines prismatischen Balkens:

$$|\sigma(x)| \text{ maximal für maximales } |M(x)|$$

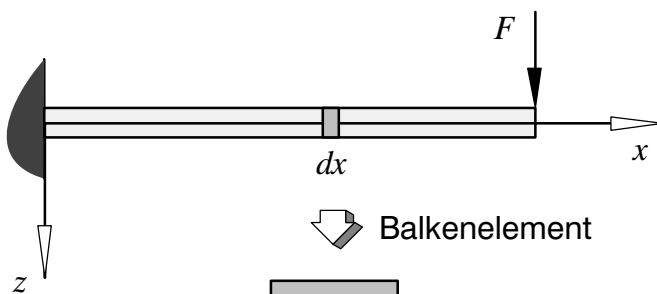
## 12.3 Schubspannungen bei gerader Biegung

### Annahmen

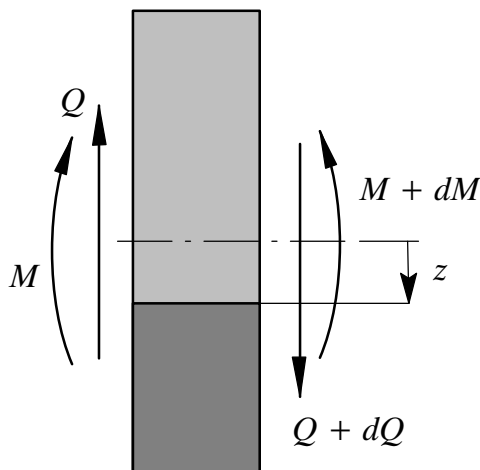
- prismatischer Balken mit rechteckigem Querschnitt (Breite  $b$ , Höhe  $h$ )  
 $\rightarrow I_y = \frac{bh^3}{12}, A = bh$
- konstante Schubspannungen über der Breite



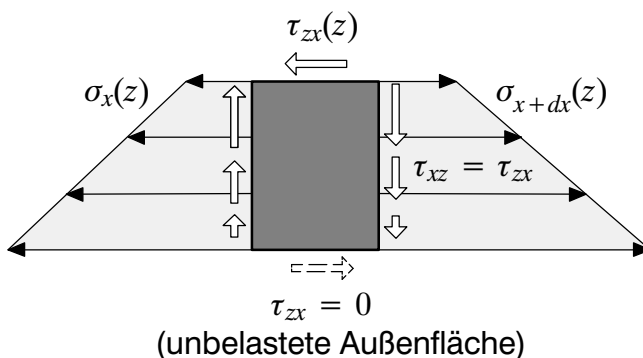
### Berechnung der Schubspannungen



Balkenelement



unterer Teil



Für das Balkenelement gilt für die

- Querkraft

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

- Spannungsverteilung

$$\sigma_x(z) = \frac{M}{I_y} z,$$

$$\sigma_{x+dx}(z) = \frac{M + dM}{I_y} z$$

Aus der Gleichgewichtsbedingung

$\sum F_x = 0$  folgt für den unteren Teil

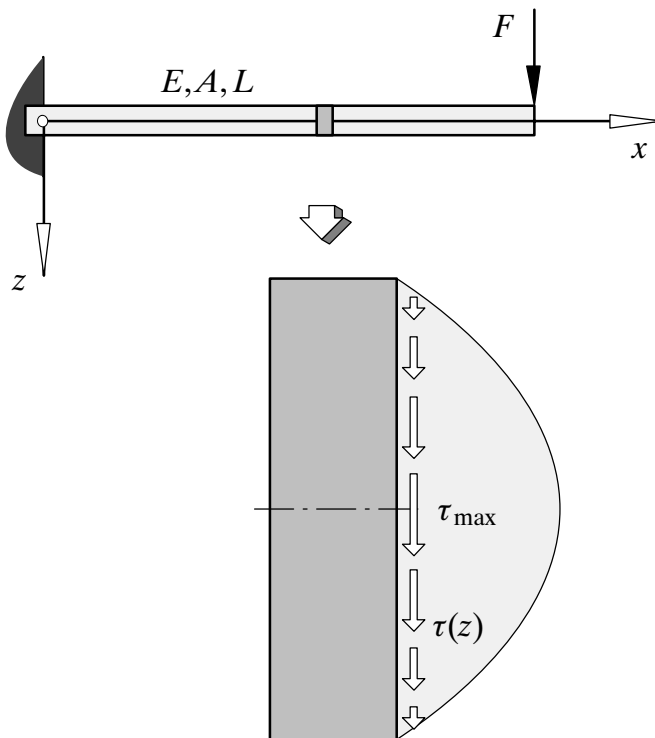
$$-\int_z^{h/2} \sigma_x(z) b dz - \tau_{zx}(z) b dx + \int_z^{h/2} \sigma_{x+dx}(z) b dz = 0$$

Mit der Cauchy-Symmetrie erhält man daraus einen parabelförmigen Schubspannungsverlauf:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}(z) = \tau_{zx}(z) &= \int_z^{h/2} \frac{\sigma_{x+dx} - \sigma_x}{dx} dz \\ &= \int_z^{h/2} \frac{M + dM - M}{dx} \frac{z}{I_y} dz \\ &= \frac{Q}{I_y} \int_z^{h/2} z dz = \frac{Q}{2I_y} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \end{aligned}$$



## Abschätzung der Schubspannungen



maximale Biegespannung:

$$\begin{aligned}\sigma_{\max} &= \sigma(x=0, z=h/2) \\ &= \frac{M(0)}{I_y} \frac{h}{2} = \frac{12 FL}{bh^3} \frac{h}{2} \\ &= 6 \frac{F}{A} \frac{L}{h}\end{aligned}$$

maximale Schubspannung:

$$\tau_{\max} = \tau_{xz}(0) = \frac{Qh^2}{8I_y} = \frac{3}{2} \frac{Q}{A} = \frac{3}{2} \frac{F}{A}$$

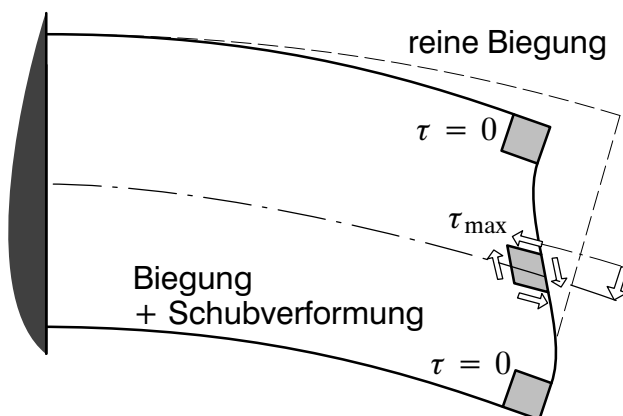
Ein Vergleich der beiden Maximalspannungen,

$$\frac{\tau_{\max}}{\sigma_{\max}} = \frac{1}{4} \frac{h}{L}$$

zeigt, dass die Schubspannung in Biegeproblemen vernachlässigt werden kann:

- $\tau_{\max} \ll \sigma_{\max}$  für  $h \ll L$  (schlanker Balken)
- für die obere und untere Faser (kritische Fasern auf Grund der Biegespannungen) gilt ohnehin  $\tau = 0$

## Schubverformung



Nach dem Hooke'schen Gesetz

$$\gamma_{xz}(z) = \frac{1}{G} \tau_{xz}(z)$$

findet man folgende Gleitungen:

- Elemente der oberen und unteren Faser bleiben wegen  $\tau = 0$  unverformt
- Elemente der neutralen Faser werden wegen  $\tau_{\max}$  maximal geschert

Daraus resultiert eine Verwerfung der Balkenquerschnitte und eine zusätzliche Durchbiegung gegenüber der reinen Biegung, beide Effekte sind für schlanke Balken ( $h \ll L$ ) jedoch ebenfalls vernachlässigbar.