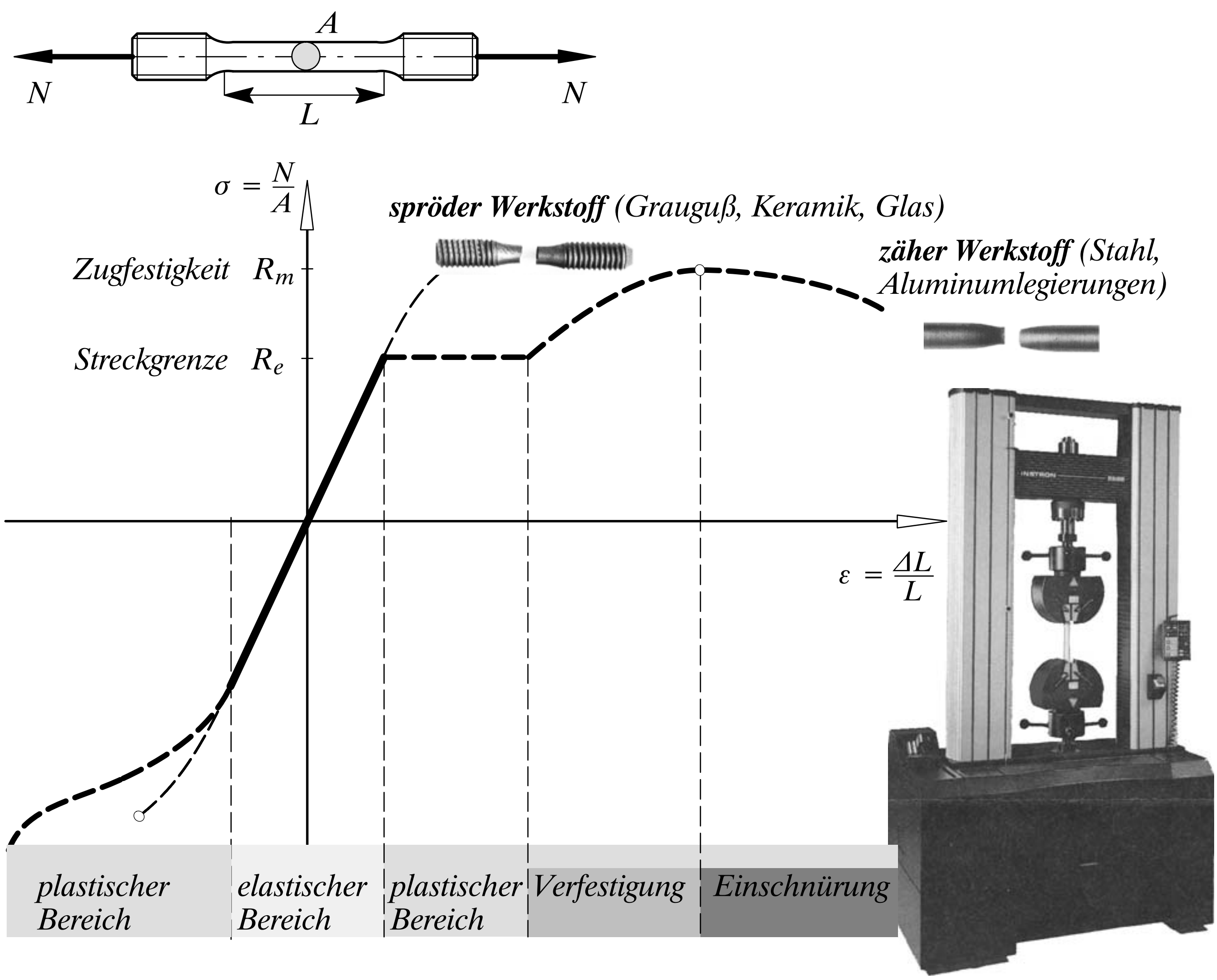
11 Verzerrungen

Alle technisch eingesetzten Werkstoffe sind mehr oder weniger nachgiebig und verformbar. Dies kann als definierte Federwirkung erwünscht sein, häufig aber ist es unerwünscht und muss technisch beherrscht werden. Normalspannungen führen im Wesentlichen auf Längenänderungen oder Dehnungen, Schubspannungen auf Winkeländerungen oder Gleitungen. Aus den Dehnungen bzw. Gleitungen im Kleinen lassen sich dann makroskopische Stabverlängerungen bzw. Stabverdrehungen durch Axiallast bzw. Momentenwirkung berechnen.

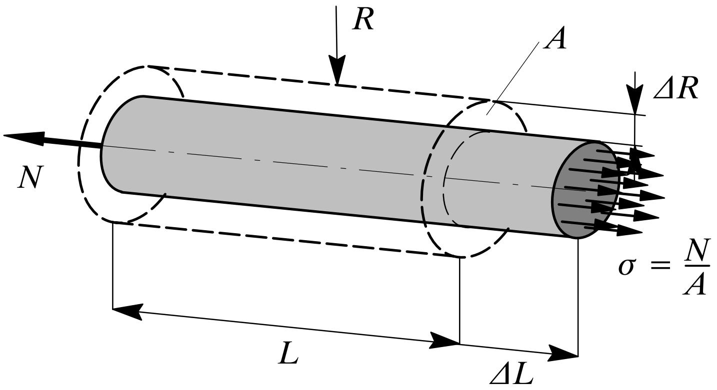
Bei geringen Belastungen verhalten sich viele Materialien elastisch, d.h. die Verformung ist proportional zur Belastung und verschwindet wieder bei Entlastung. Den Proportionalitätsfaktor zwischen Normalspannungen und Dehnungen bezeichnet man als Elastizitätsmodul, zwischen Schubspannungen und Gleitungen als Schubmodul. Zusätzlich treten bei Dehnungen i. Allg. Querkontraktionen auf, die durch die Poisson'sche Zahl beschrieben werden. Aufgrund der inneren Zusammenhänge zwischen Normal- und Schubspannungen einerseits sowie zwischen Dehnungen und Gleitungen andererseits sind diese drei Werkstoffkennwerte bei isotropen Werkstoffen nicht unabhängig voneinander.

<u>Spannungs–Dehnungs–Diagramm</u>



11.1 Dehnungen

Prismatischer Stab unter Axiallast



Experimentelle Beobachtung:

- Axialdehnung $\varepsilon = \dfrac{\Delta L}{L}$

  $\varepsilon > 0$: Dehnung

  $\varepsilon < 0$: Stauchung

  Einheiten: $[-]$ oder $[\%]$

- Querdehnung $\varepsilon_l = \dfrac{\Delta R}{R}$

  $\varepsilon_l > 0$: Querdehnung

  $\varepsilon_l < 0$: Querkontraktion

  Einheiten: $[-]$ oder $[\%]$

Eigenschaften isotroper elastischer Werkstoffe

Hooke'sches Gesetz: $\sigma = E\,\varepsilon$

Elastizitätsmodul
$[\mathrm{MPa}]$, $[\mathrm{psi}]$

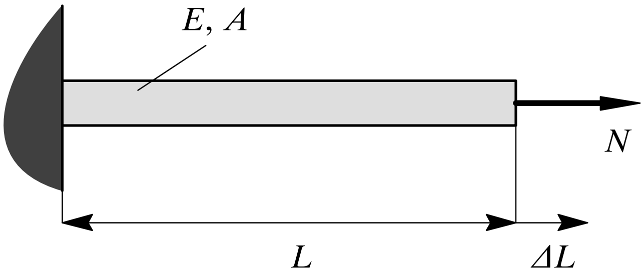
Querdehnung: $\nu = -\dfrac{\varepsilon_l}{\varepsilon}$

Querdehnzahl, (1/ν: Poisson'sche Zahl)
$[-]$

Material	*Elastizitätsmodul* E [MPa]	*Querdehnzahl* ν $[-]$	*Schubmodul* G [MPa]
Stahl	*190 000 − 210 000*	*0.27 − 0.30*	*75 000 − 80 000*
Aluminium-legierungen	*70 000 − 79 000*	*0.33*	*26 000 − 30 000*
Messing	*96 000 − 110 000*	*0.34*	*36 000 − 41 000*
Gummi	*0.7 − 4*	*0.45 − 0.50*	*0.2 − 1.0*

Stabverlängerung

- prismatischer Stab



$$\Delta L = \underbrace{\frac{L}{EA}} N$$

$$f = \frac{L}{EA} \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{N}}\right]$$

Elastizität
(Nachgiebigkeit)

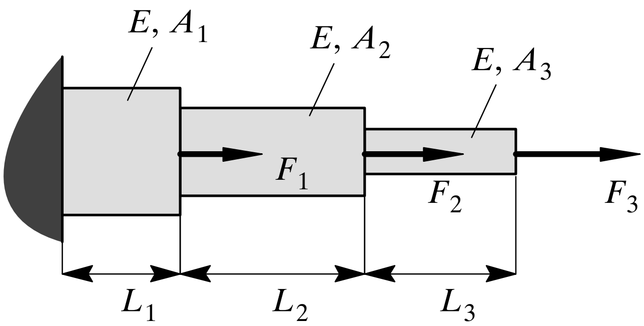
oder

$$N = \underbrace{\frac{EA}{L}} \Delta L$$

$$c = \frac{EA}{L} \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

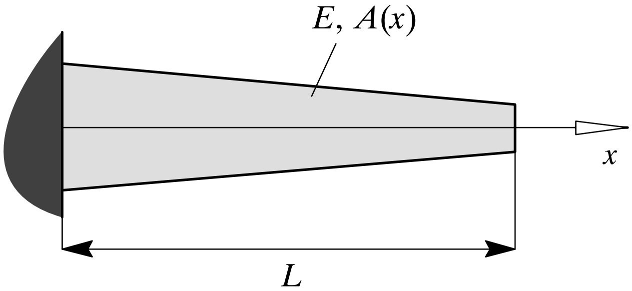
Steifigkeit
(Federkonstante)

- abgesetzter Stab



$$\Delta L = \sum_i \Delta L_i = \sum_i \frac{L_i N_i}{EA_i}$$

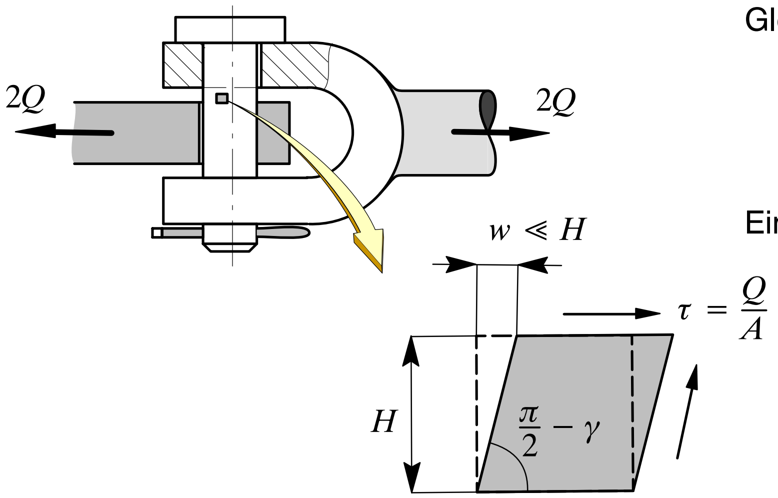
- allgemein



$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)}\, dx$$

11.2 Gleitungen

Schub durch Querkräfte



Gleitung: Winkeländerung durch Scheren eines Rechtecks

$$\gamma = \frac{w}{H}$$

Einheiten: $1\,[\mathrm{rad}] = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

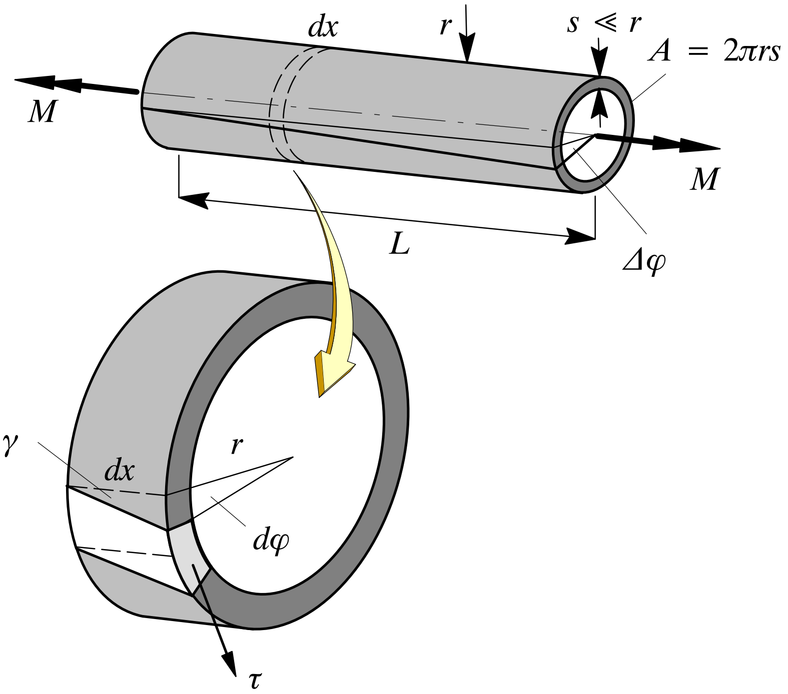
Eigenschaften isotroper elastischer Werkstoffe

Hooke'sches Gesetz: $\tau = G\,\gamma$

Schubmodul $[\mathrm{MPa}]$, $[\mathrm{psi}]$ $\quad G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

Torsion

- Zylinderschale (dünnwandiges Rohr)



Hooke'sches Gesetz $\tau = G\,\gamma$

$$\rightarrow \frac{M}{rA} = G\,r\,\frac{d\varphi}{dx}$$

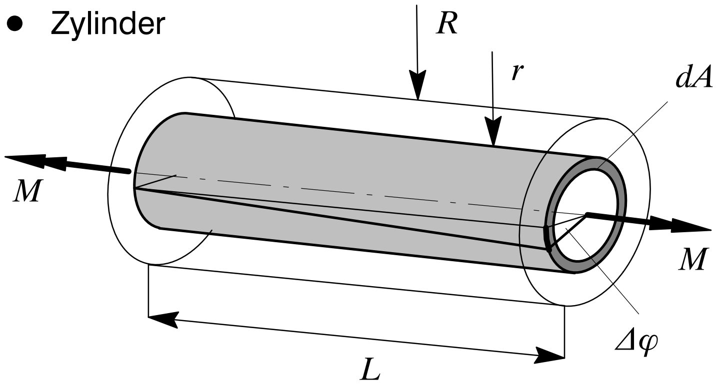
$$\rightarrow \frac{M}{G\,r^2 A}\,dx = d\varphi$$

Durch Integration folgt

$$\Delta\varphi = \frac{L}{G\,r^2 A}\,M$$

oder $\quad M = \dfrac{G\,r^2 A}{L}\,\Delta\varphi$

- Zylinder



Schichtung aus infinitesimal dünnen Zylinderschalen

$$dM = \frac{G\,r^2 dA}{L}\,\Delta\varphi$$

$$= \frac{G\,\Delta\varphi}{L}\;r^2 dA$$

Mit dem **polaren Flächenträgheitsmoment** $I_p = \int_A r^2 dA$ folgt durch Integration

$$M = \underbrace{\frac{GI_p}{L}}\,\Delta\varphi \qquad \text{oder} \qquad \Delta\varphi = \underbrace{\frac{L}{GI_p}}\,M$$

$$c_T = \frac{GI_p}{L}\;\left[\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{rad}}\right] \qquad\qquad f_T = \frac{L}{GI_p}\;\left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{Nm}}\right]$$

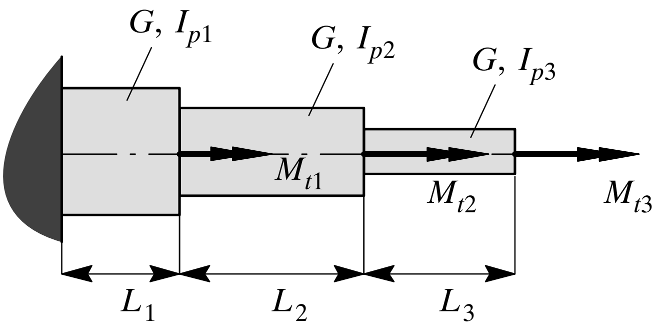
Torsionssteifigkeit — Torsionsnachgiebigkeit

Gleitungen und Schubspannungen im Zylinder sind radienabhängig:

$$\gamma(r) = \frac{r}{L}\,\Delta\varphi = \frac{r}{GI_P}\,M$$

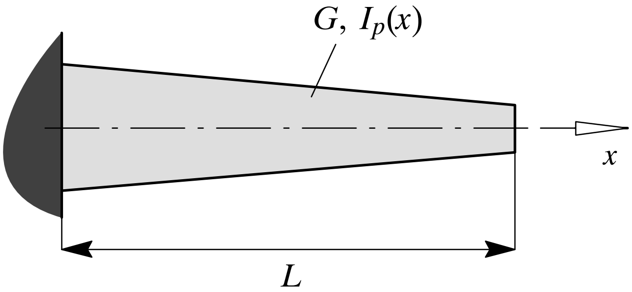
$\tau(r) = G\,\gamma(r) = \frac{r}{I_P}\,M \quad\rightarrow\quad$ max. Schubspannung $\quad \tau_{\max} = \tau(R) = \frac{R}{I_p}\,M$

- abgesetzte Welle



$$\Delta\varphi = \sum_i \Delta\varphi_i = \sum_i \frac{L_i\,M_i}{GI_{pi}}$$

- allgemein



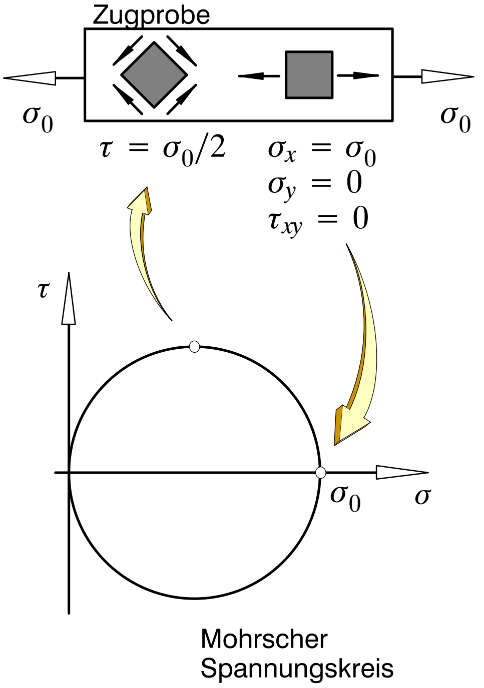
$$\Delta\varphi = \int_0^L \frac{M(x)}{GI_p(x)}\,dx$$

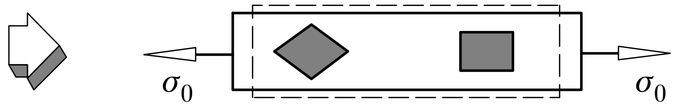
11.3 Werkstoffeigenschaften

Idealisierungen des Werkstoffverhaltens

- **homogen** (gleiche Eigenschaften im gesamten Körper)
- **isotrop** (gleiche Eigenschaften in alle Richtungen)
- **linear elastisch** (Proportionalität zw. Spannung und Dehnung)

Beziehung zwischen den Werkstoffkennwerten E, ν, G

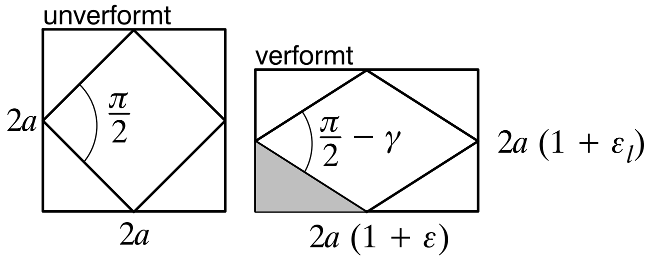




$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E}$$

$$\varepsilon_l = -\nu\,\varepsilon$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$



$$\tan\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right) = \frac{a\,(1+\varepsilon_l)}{a\,(1+\varepsilon)} = \frac{a\,(1-\nu\varepsilon)}{a\,(1+\varepsilon)}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\sin(\pi/4 - \gamma/2)}{\cos(\pi/4 - \gamma/2)}$$

$$= \frac{\sin\pi/4\,\cos\gamma/2 - \cos\pi/4\,\sin\gamma/2}{\cos\pi/4\,\cos\gamma/2 + \sin\pi/4\,\sin\gamma/2}$$

$$= \frac{\cos\gamma/2 - \sin\gamma/2}{\cos\gamma/2 + \sin\gamma/2} \approx \frac{1-\gamma/2}{1+\gamma/2}$$

$$\left(1 - \frac{\gamma}{2}\right)(1+\varepsilon) \approx \left(1 + \frac{\gamma}{2}\right)(1-\nu\varepsilon)$$

$$1 - \frac{\gamma}{2} + \varepsilon - \frac{\gamma\,\varepsilon}{2} \approx 1 + \frac{\gamma}{2} - \nu\,\varepsilon - \nu\,\frac{\gamma\,\varepsilon}{2}$$

$$\gamma \approx (1+\nu)\,\varepsilon$$

$$\frac{\sigma_0}{2G} \approx (1+\nu)\,\frac{\sigma_0}{E}$$

$$G \approx \frac{E}{2(1+\nu)}$$