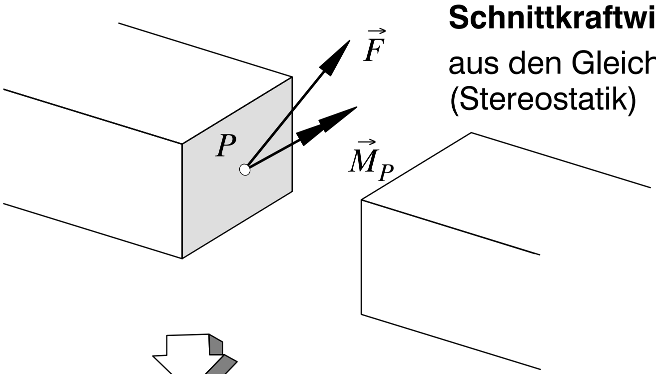
10 Spannungen

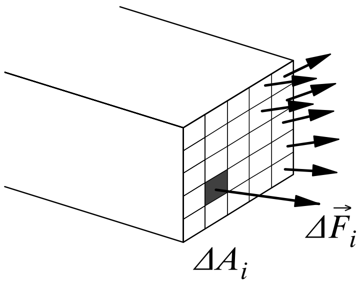
Der resultierende Schnittkraftwinder reicht nicht aus, um das unterschiedliche Versagen von Stäben oder Balken mit unterschiedlichem Querschnitt zu erklären. Dazu muss man auf eine punktuelle Betrachtung im Querschnitt übergehen, die auf den Spannungsbegriff führt.

Man unterscheidet Normalspannungen senkrecht zur Schnittebene und Schubspannungen in der Schnittebene. Für einfache Belastungen wie Stab unter Axiallast, reiner Schub oder Torsion lassen sich die Spannungen für idealisierte Annahmen über deren Verteilung direkt aus dem Schnittkraftwinder berechnen. Allerdings besteht eine Abhängigkeit dieser Spannungen von der virtuellen Schnittrichtung, die sich mit Hilfe des Mohr'schen Spannungskreises beschreiben lässt.



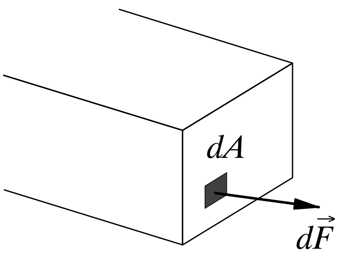
Schnittkraftwinder

aus den Gleichgewichtsbedingungen (Stereostatik)



kontinuierlich verteilte Kraft

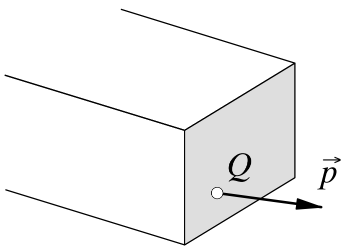
$$\left(\Delta\vec{F}_1\,,\,\Delta\vec{F}_2\,,\ldots\right) \sim \left\{\vec{F},\,\vec{M}_P\right\}$$



Spannungsvektor:

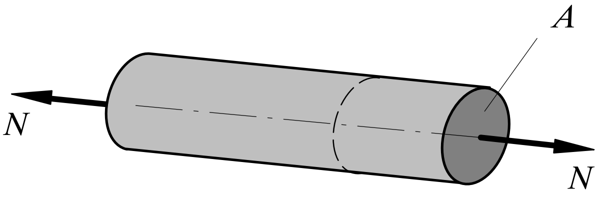
flächenspezifische Kraft

$$\vec{p} = \lim_{\Delta A_i \to 0} \frac{\Delta\vec{F}_i}{\Delta A_i} = \frac{d\vec{F}}{dA}$$



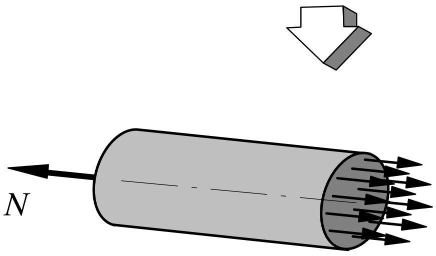
10.1 Normalspannungen

Prismatischer Stab unter Axiallast



Idealisierungen:

- schlanker Stab unter
  Zugkraft ($N > 0$) oder
  Druckkraft ($N < 0$)
  durch den Flächenmittelpunkt des Querschnitts
- homogener, isotroper Werkstoff
- Schnitt genügend weit entfernt von Einzelkräften



$$\sigma = \frac{N}{A}$$

gleichförmig verteilte Normalspannungen

$\sigma > 0$: Zugspannungen
$\sigma < 0$: Druckspannungen

Einheiten: $1\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] = 1\,[\mathrm{Pa}], \quad 1\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right] = 1\,[\mathrm{MPa}], \quad 1\,[\mathrm{psi}] = 6895\,[\mathrm{Pa}]$

Festigkeitsberechnung

Festigkeitsbedingung: $|\sigma| \leq \sigma_{zul}$

zulässige Spannung:

- Fließen (zähe Werkstoffe) $\quad \sigma_{zul} = \frac{R_e}{S_F}$

  R_e : Streckgrenze
  S_F : Sicherheitsbeiwert gegen Fließen ($S_F = 1.2 \div 2$)

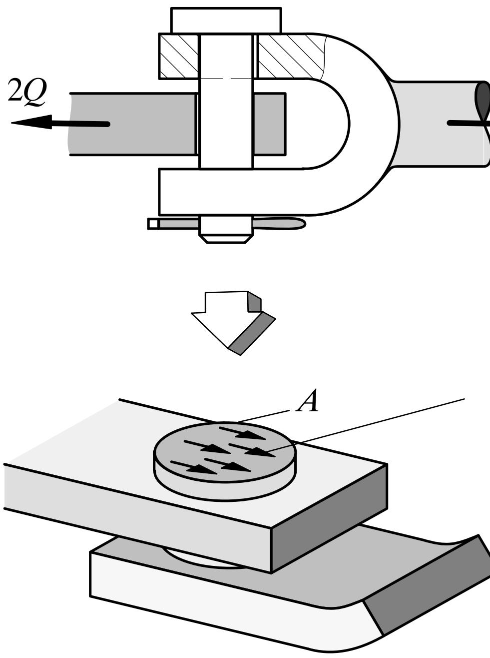
- Bruch (zähe und spröde Werkstoffe) $\quad \sigma_{zul} = \frac{R_m}{S_B}$

  R_m : Zugfestigkeit
  S_B : Sicherheitsbeiwert gegen Bruch
  (zähe Werkstoffe $S_B = 2 \div 3$,
  spröde Werkstoffe $S_B = 3 \div 6$)

gegeben	gesucht	Berechnungsaufgabe
$A,\ R_{e,m},\ S_{F,B}$	N	Lastbegrenzung
$N,\ R_{e,m},\ S_{F,B}$	A	Dimensionierung
$N,\ A,\ S_{F,B}$	$R_{e,m}$	Werkstoffauswahl
$N,\ A,\ R_{e,m}$	$S_{F,B}$	Sicherheitsanalyse

10.2 Schubspannungen

Reiner Schub durch Querkraft



$$\tau = \frac{Q}{A}$$

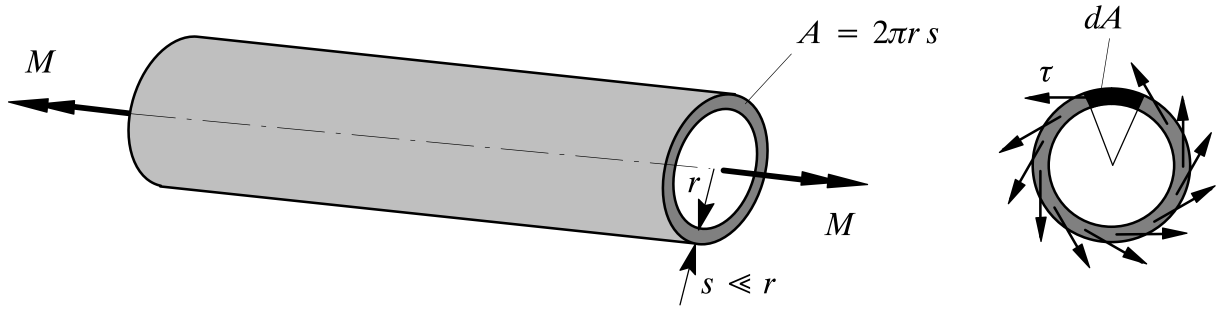
mittlere Schubspannung

Einheiten: $1\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right] = 1\ [\mathrm{Pa}],$

$$1\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}\right] = 1\ [\mathrm{MPa}],$$

$$1\ [\mathrm{psi}] = 6895\ [\mathrm{Pa}]$$

Torsion einer Zylinderschale (dünnwandiges Rohr)

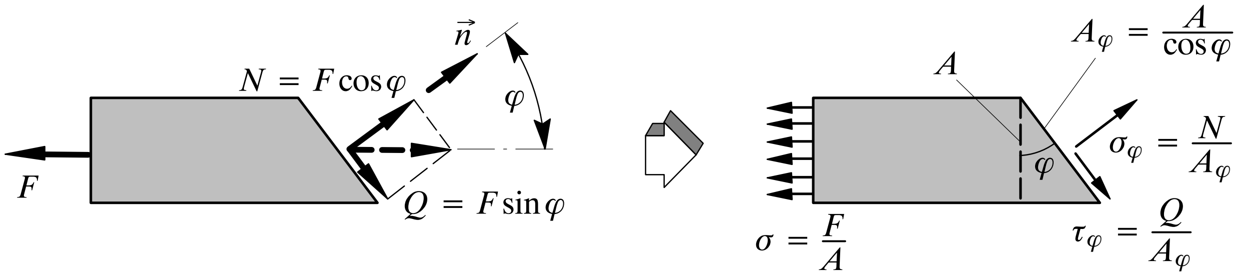


Torsionsmoment: $M = \int_A r\,\tau\,dA = r\,\tau \int_A dA = r\,\tau\,A$

$$\rightarrow \tau = \frac{M/r}{A} = \frac{M}{2\pi r^2 s}$$ Schubspannung

10.3 Ebener Spannungszustand

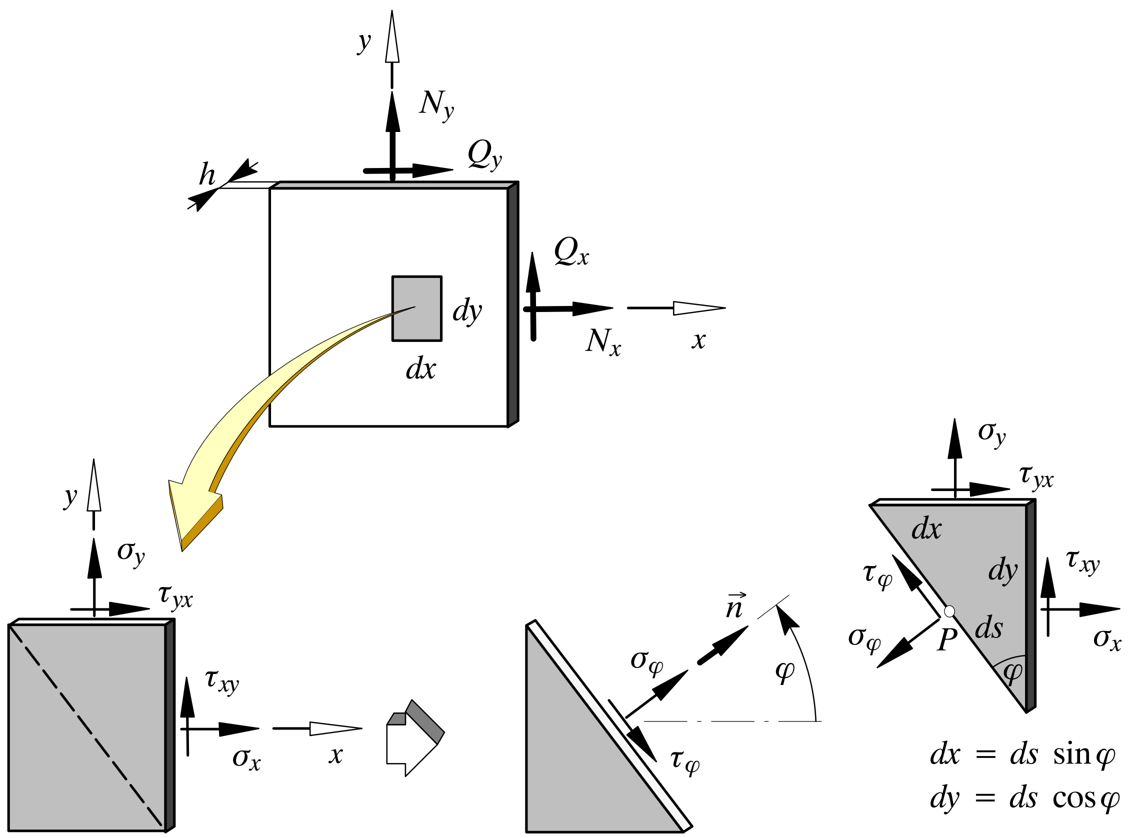
Beispiel: Geneigter Schnitt durch axialbelasteten Stab



$$\sigma_\varphi = \frac{F\cos\varphi}{A/\cos\varphi} = \sigma\cos^2\varphi = \frac{\sigma}{2}(1+\cos 2\varphi)$$

$$\tau_\varphi = \frac{F\sin\varphi}{A/\cos\varphi} = \sigma\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\sigma}{2}\sin 2\varphi$$

Verallgemeinerung: Gedrehter Schnitt durch eine dünne Platte



$$dx = ds\,\sin\varphi$$
$$dy = ds\,\cos\varphi$$

Vorzeichenregelung:

$\sigma_x\,,\ \sigma_y > 0:$ Zugspannung
$\tau_{xy}\,,\ \tau_{yx} > 0:$ in Koordinatenrichtung für positives Schnittufer

$\sigma_\varphi > 0:$ Zugspannungen
$\tau_\varphi > 0:$ verdreht Element im Uhrzeigersinn

Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum M_{Pz} = \tau_{xy}\, h\, dy \cdot \frac{dx}{2} - \tau_{yx}\, h\, dx \cdot \frac{dy}{2} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x = -\sigma_\varphi \cos\varphi\, h\, ds - \tau_\varphi \sin\varphi\, h\, ds + \sigma_x\, h\, dy + \tau_{yx}\, h\, dx$$
$$= \left[-\sigma_\varphi \cos\varphi - \tau_\varphi \sin\varphi + \sigma_x \cos\varphi + \tau_{yx} \sin\varphi\right] h\, ds = 0 \qquad (2)$$

$$\sum F_y = -\sigma_\varphi \sin\varphi\, h\, ds + \tau_\varphi \cos\varphi\, h\, ds + \sigma_y\, h\, dx + \tau_{xy}\, h\, dy$$
$$= \left[-\sigma_\varphi \sin\varphi + \tau_\varphi \cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi + \tau_{xy} \cos\varphi\right] h\, ds = 0 \qquad (3)$$

Lösung für σ_φ, τ_φ

(1): $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ Symmetrie der Schubspannungen (Cauchy)

$-\cos\varphi\cdot(2) - \sin\varphi\cdot(3)$: $\sigma_\varphi - \sigma_x \cos^2\varphi - \sigma_y \sin^2\varphi - \tau_{xy}\, 2 \sin\varphi \cos\varphi = 0$

$-\sin\varphi\cdot(2) + \cos\varphi\cdot(3)$: $\tau_\varphi - \sigma_x \sin\varphi\cos\varphi + \sigma_y \sin\varphi\cos\varphi + \tau_{xy}(-\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) = 0$

$\sin^2\varphi = (1 - \cos 2\varphi)/2$
$\cos^2\varphi = (1 + \cos 2\varphi)/2$
$\sin\varphi\cos\varphi = (\sin 2\varphi)/2$

Normalspannung: $\sigma_\varphi = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi$

Schubspannung: $\tau_\varphi = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi$

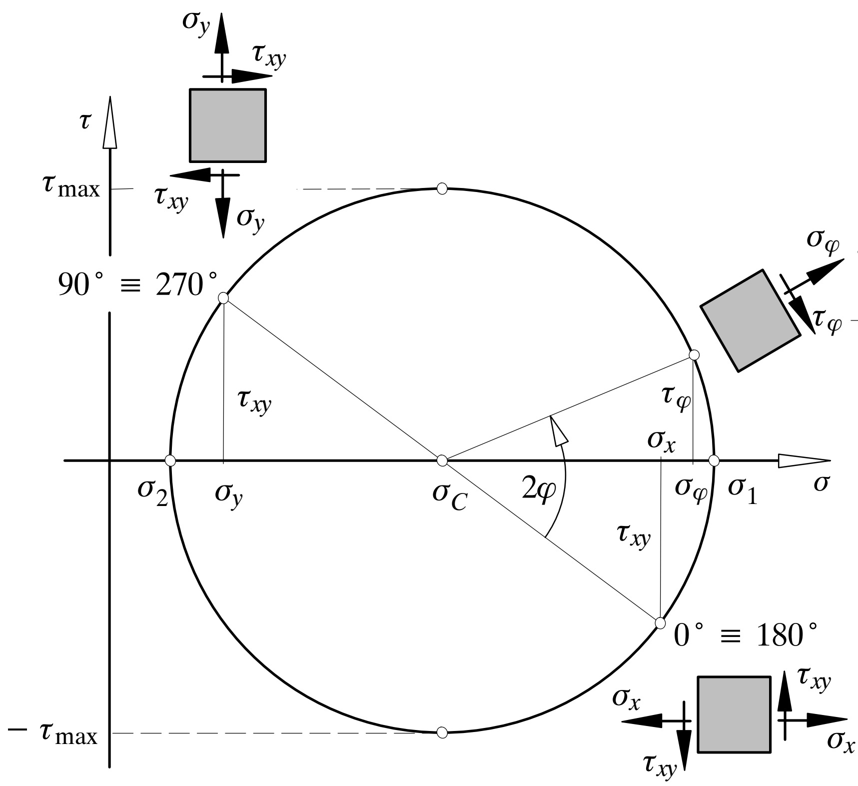
Die Punkte $(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ liegen auf einem Kreis (**Mohr'scher Spannungskreis**) mit

Radius $r = \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2}$
Mittelpunkt $(\sigma_C, \tau_C) = \left((\sigma_x + \sigma_y)/2,\ 0\right)$
Parameter 2φ

Beweis: $(\sigma_\varphi - \sigma_C)^2 + \tau_\varphi^2$

$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_{xy} \sin 2\varphi\right)^2 + \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi\right)^2$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \cos^2 2\varphi + \tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \tau_{xy}^2 \sin^2 2\varphi$$
$$+ \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 \sin^2 2\varphi - \tau_{xy} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi \cos 2\varphi + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\varphi$$
$$= \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 \equiv r^2$$

Mohr'scher Spannungskreis

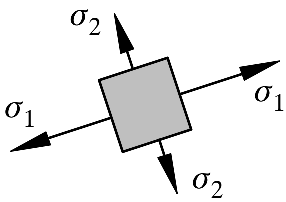


Konstruktion

1) Zeichne ein σ, τ-Koordinatensystem.
2) Trage $(\sigma_{0^\circ}, \tau_{0^\circ}) = (\sigma_x, -\tau_{xy})$ und $(\sigma_{90^\circ}, \tau_{90^\circ}) = (\sigma_y, \tau_{xy})$ entsprechend der Vorzeichenregelung für gedrehte Schnitte ein.
3) Der Mittelpunkt des Mohr'schen Spannungskreises ergibt sich als Schnittpunkt der Verbindungslinie dieser beiden Punkte mit der σ-Achse. Zeichne einen Kreis durch die beiden Punkte.
4) Andere Spannungszustände $(\sigma_\varphi, \tau_\varphi)$ ergeben sich als Punkte auf dem Kreis mit dem doppelten Verdrehwinkel 2φ bez. des $(\sigma_{0^\circ}, \tau_{0^\circ})$-Punktes, insbesondere die Hauptspannungen $(\tau_{1,2} = 0)$ und die maximalen Schubspannungen.

- Hauptspannungen (max./min. Normalspannungen, keine Schubspannungen):

$$\sigma_{1,2} = \sigma(\varphi_{1,2}) = \sigma_C \pm r$$



$$\tau_\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_{xy} \cos 2\varphi \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \tan 2\varphi_{1,2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

- maximale Schubspannungen:

$$\pm\,\tau_{\max} = \pm\, r$$