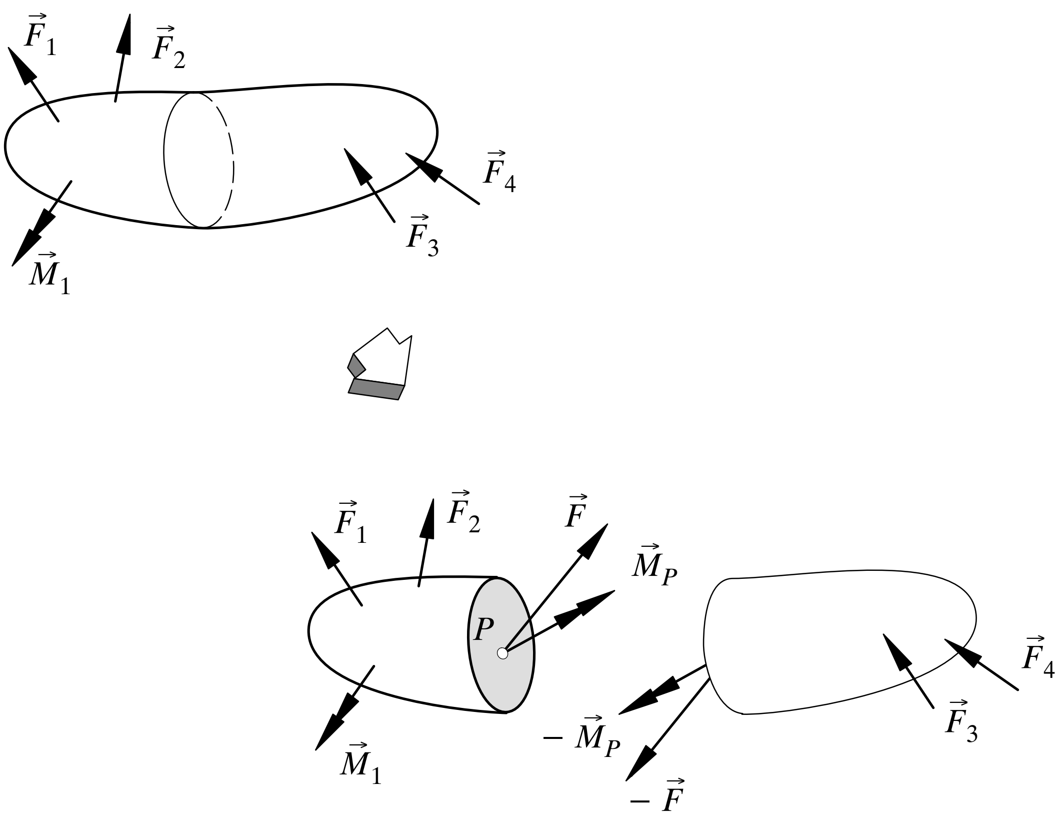
9 Innere Balkenbelastung

Zur Dimensionierung von Maschinenelementen werden die inneren Belastungen benötigt. Dies ist besonders für schlanke Bauteile wie Achsen, Wellen, Streben und Stützen wichtig, die nur geringe innere Momente aufnehmen können. Für die Berechnung führt man einen virtuellen Schnitt durch das Bauteil und interpretiert den Zusammenhalt der beiden Hälften als starre Bindung, die bei räumlicher Betrachtung sechs, bei ebener Betrachtung drei Reaktionen übertragen kann. Bei bestimmt gelagerten Maschinenelementen können diese dann mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen gefunden werden.

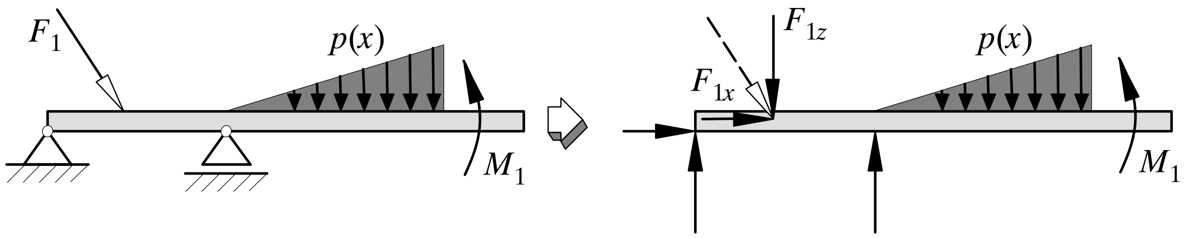
Gerade, schlanke Maschinenelemente werden als Balken modelliert, die Normalkräfte in Balkenlängsrichtung, Querkräfte in Balkenquerrichtung und Biegemomente aufnehmen können. Diese Größen hängen i. Allg. vom Ort des virtuellen Schnitts ab, so dass sich Verläufe in Abhängigkeit der Balkenlängskoordinate ergeben. Zwischen den Verläufen besteht ein differentieller Zusammenhang, der für die Berechnung genutzt werden kann. Bei unstetigen Verläufen bietet sich eine Notation nach Föppl an.



9.1 Innere Kräfte und Momente

<u>Vorgehen zur Analyse statisch bestimmter Maschinenkomponenten</u>

1) Freischneiden der Maschinenkomponente

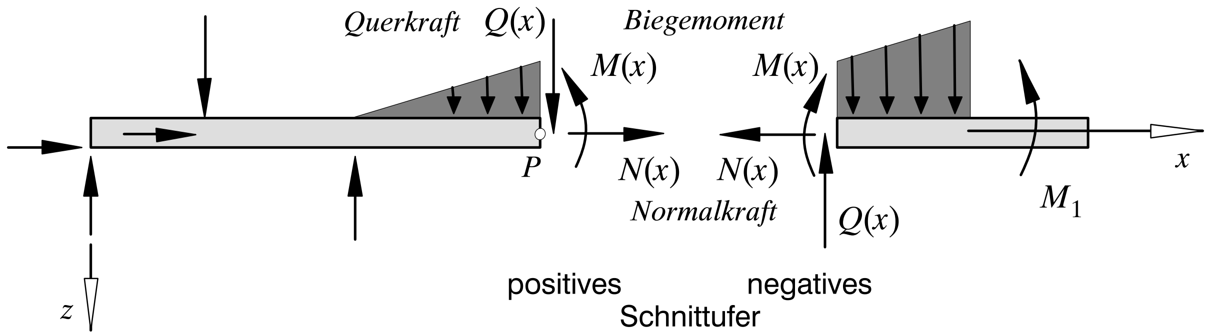


2) Bestimmung der äußeren Reaktionen mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen für die Gesamtkomponente:

Standard	**Alternative**
$\sum F_x = 0$	$\sum F_x = 0$
$\sum F_z = 0$	$\sum M_{Py} = 0$
$\sum M_{Py} = 0\,,\;\; P \text{ beliebig}$	$\sum M_{Qy} = 0$
	$P, Q \text{ beliebig mit } x_P \neq x_Q$

3) Gedanklicher Schnitt durch die Komponente und Bestimmung des inneren Kraftwinders aus den Gleichgewichtsbedingungen für den linken oder rechten Teil:

<u>Vorzeichenregelung für innere Belastungen</u>



<u>Gleichgewichtsbedingungen</u>

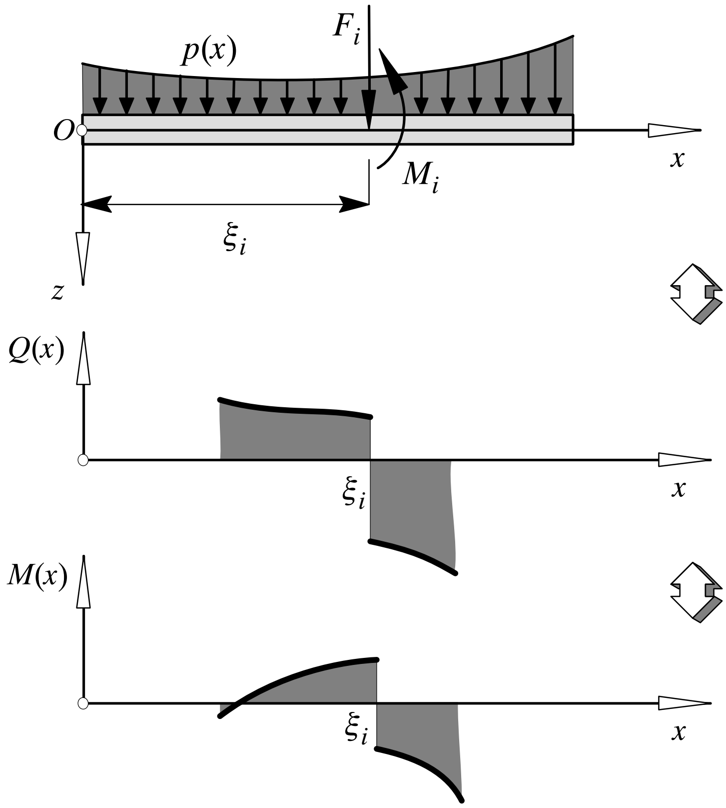
Normalkraft $N(x)$ aus $\sum F_x = 0$

Querkraft $Q(x)$ aus $\sum F_z = 0$

Biegemoment $M(x)$ aus $\sum M_{Py} = 0$

9.2 Querkraft– und Biegemomentenverlauf

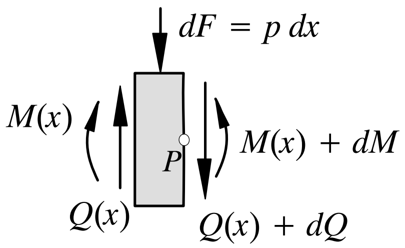
Graphische Darstellung von $Q(x)$ und $M(x)$



$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -\,p(x) \\ Q(\xi_i^+) &= Q(\xi_i^-) - F_i \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dM}{dx} &= Q(x) \\ M(\xi_i^+) &= M(\xi_i^-) - M_i \end{aligned}}$$

Beweis:



$$\sum F_z = -\,Q(x) + p\,dx + \big(Q(x) + dQ\big) = 0$$

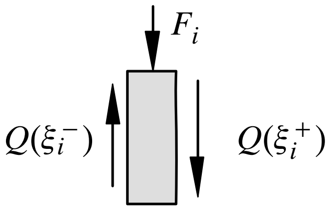
$$\Rightarrow\ dQ = -\,p\,dx$$

$$\Rightarrow\ \frac{dQ}{dx} = -\,p$$

$$\sum M_{Py} = -\,M(x) - Q(x)\,dx + p\,dx\,\frac{dx}{2} + \big(M(x) + dM\big) = 0$$

$$\Rightarrow\ dM = Q(x)\,dx - p\,\frac{dx^2}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{dM}{dx} = Q(x) - p\,\frac{dx}{2}$$



$$\sum F_z = -\,Q(\xi_i^-) + F_i + Q(\xi_i^+) = 0$$

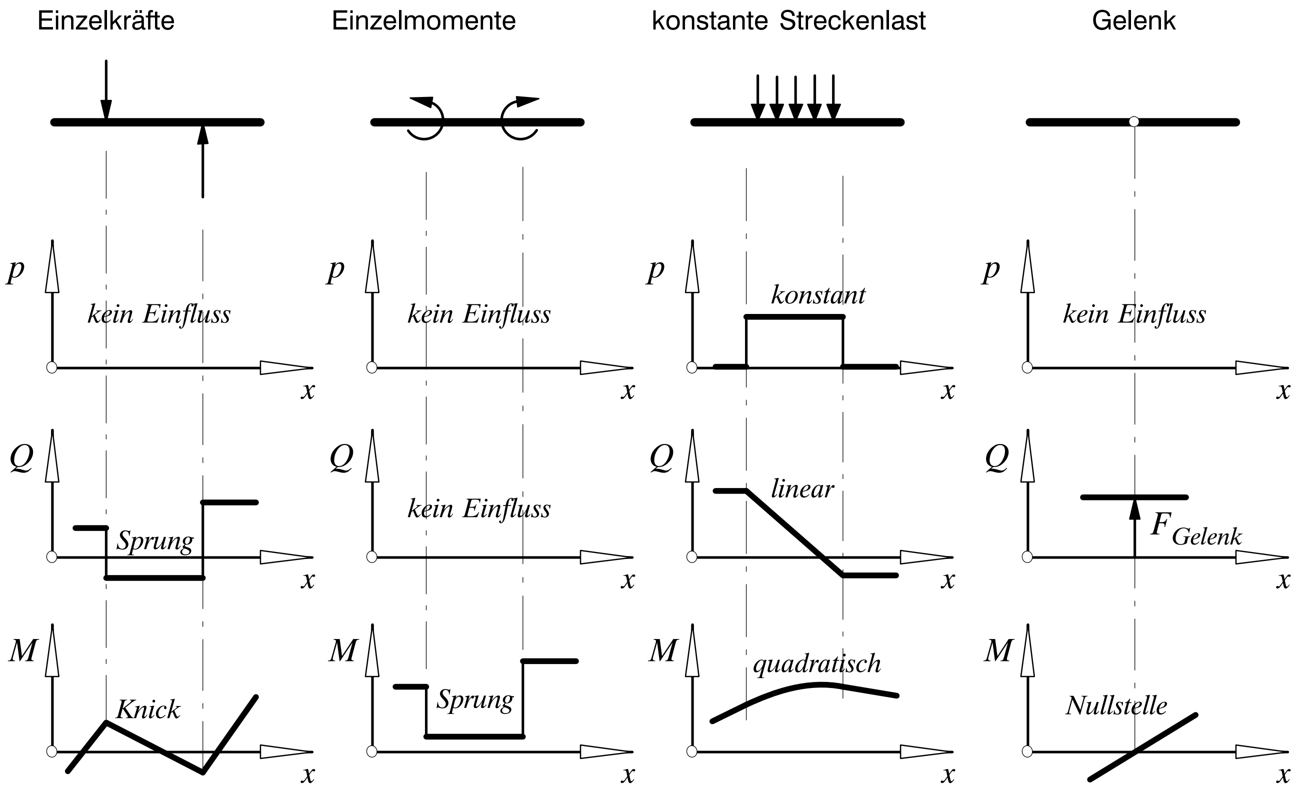
$$\Rightarrow\ Q(\xi_i^+) = Q(\xi_i^-) - F_i$$

Beziehungen zwischen den Diagrammen

$$\frac{dQ}{dx} = -p(x)\ , \qquad \frac{dM}{dx} = Q(x)$$

p(x)	*<0*			*0*			*>0*		
Q(x)	*steigend*			*konstant*			*fallend*		
	<0	*0*	*>0*	*<0*	*0*	*>0*	*<0*	*0*	*>0*
M(x)	*Linkskurve*			*Gerade*			*Rechtskurve*		
	fallend	*waage-rechte Tangente*	*steigend*	*fallend*	*waage-recht*	*steigend*	*fallend*	*waage-rechte Tangente*	*steigend*

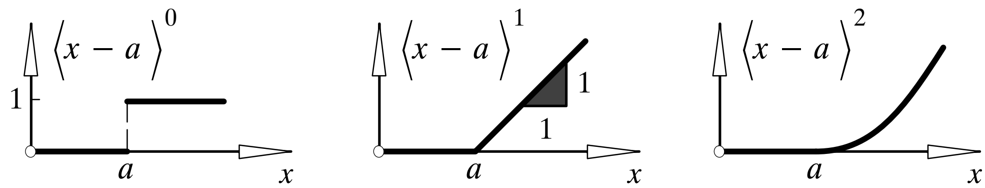
Typische Belastungen



9.3 Föppl–Symbol für unstetige Belastung

Die mühselige bereichsweise Integration von $p(x)$ und $Q(x)$ zur Ermittlung von $Q(x)$ und $M(x)$ kann durch folgende Notation für unstetige Funktionen vermieden werden:

$$\left\langle x - a \right\rangle^n = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad x < a \\ (x-a)^n & \textit{für} \quad x \geq a \end{cases}$$

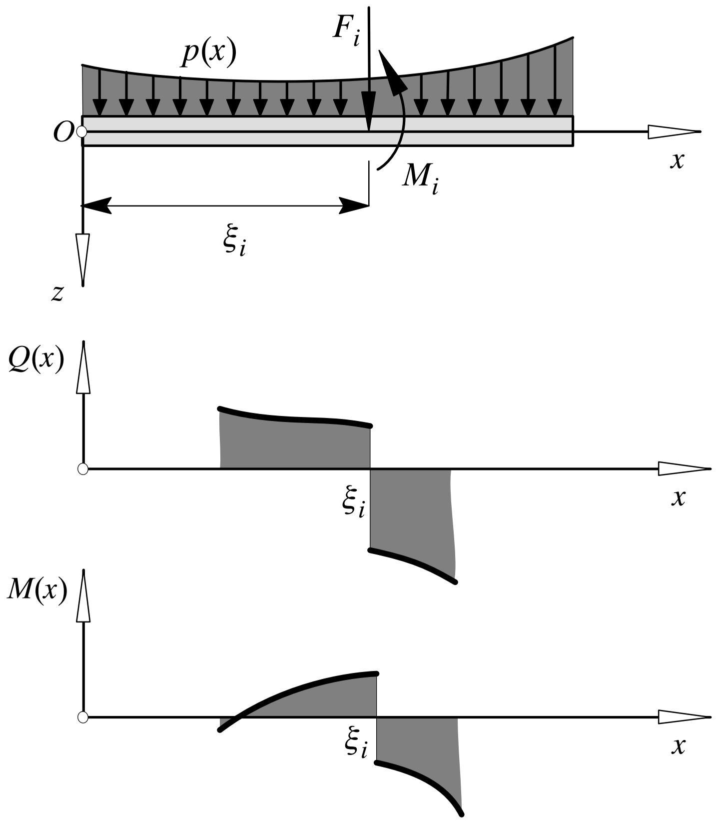


Regeln der Differentiation und Integration

$$\frac{d}{dx}\left\langle x - a \right\rangle^n = n \left\langle x - a \right\rangle^{n-1} ,$$

$$\int_0^x \left\langle \xi - a \right\rangle^n d\xi = \frac{1}{n+1} \left\langle x - a \right\rangle^{n+1} .$$

Ermittlung von Querkraft– und Biegemomentenverlauf durch direkte Integration



Streckenlast $p(x)$
Einzelkraft F_i *an Stelle* ξ_i
Einzelmoment M_i *an Stelle* ξ_i

Querkräfte

$$Q(x) = -\int_0^x p(\xi)\, d\xi - \sum_i F_i \left\langle x - \xi_i \right\rangle^0$$

Biegemomente

$$M(x) = \int_0^x Q(\xi)\, d\xi - \sum_i M_i \left\langle x - \xi_i \right\rangle^0$$