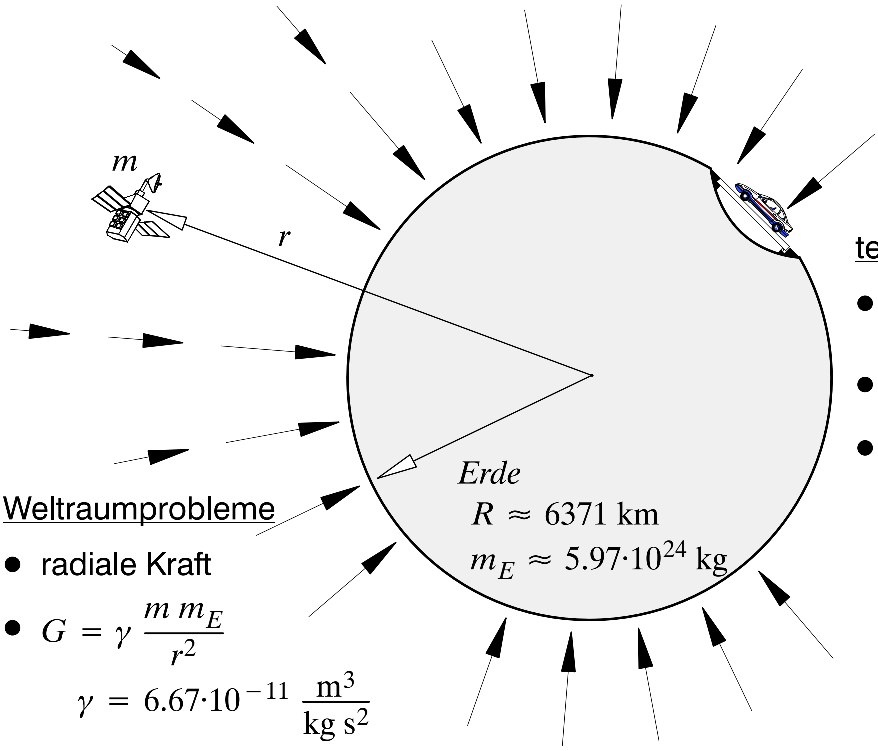
6 Schwerpunkt und andere Mittelpunkte

Gewichtskräfte sind Anziehungskräfte zwischen der verteilten Masse des betrachteten Körpers und der Erde und sind damit ebenfalls verteilte Kräfte. Interessiert man sich nicht für innere Verformungen eines Körpers, sondern untersucht lediglich äußere Effekte, können verteilte Kräfte häufig durch äquivalente resultierende Einzelkräfte in einem speziellen Mittelpunkt ersetzt werden, um die Rechnung zu vereinfachen. Im Allgemeinen ist dies der Schwerpunkt, bei Vereinfachungen bezüglich des Gravitationsfeldes oder der Homogenität und Geometrie des Körpers leiten sich daraus Massen-, Volumen-, Flächen- und Linienmittelpunkte ab. Für zusammengesetzte und symmetrische Körper findet man vereinfachte Berechnungsregeln.

6.1 Gewichtskraft und Schwerpunkt

Gewichtskraft eines einzelnen Massenpunkts



terrestrische Probleme

- äußere, eingeprägte Volumenkraft
- parallele Kräfte
- $G = \rho V g = mg$

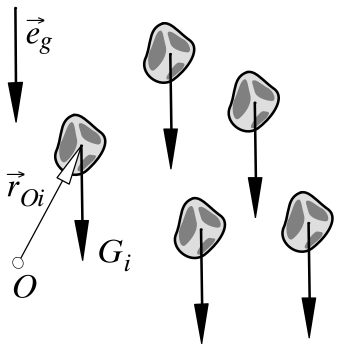
$$g = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Weltraumprobleme

- radiale Kraft
- $G = \gamma\,\dfrac{m\,m_E}{r^2}$

$$\gamma = 6.67{\cdot}10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$$

Schwerpunkt eines Massenpunktsystems



Annahme: parallele Gewichtskräfte $\vec{G}_i = G_i\,\vec{e}_g$

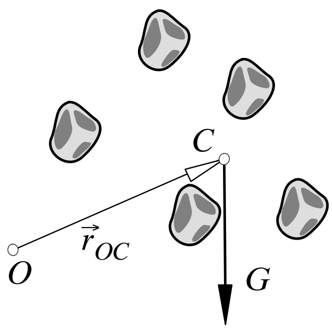
äquivalenter Kraftwinder bezüglich eines beliebigen Bezugspunkts O: $\left\{\vec{G},\ \vec{M}_O\right\}$

$$\vec{G} = \sum_i \vec{G}_i = \sum_i G_i\,\vec{e}_g = G\,\vec{e}_g$$

$$\vec{M}_O = \sum_i \vec{r}_{Oi} \times \vec{G}_i = \sum_i G_i\,\vec{r}_{Oi} \times \vec{e}_g$$

$$\vec{M}_O \perp \vec{G} \;\Rightarrow\; \textit{zentrales Kräftesystem}$$

Kräftesystem kann durch eine einzelne resultierende Kraft $\vec{G}$ im Schwerpunkt C ersetzt werden:



$$\vec{M}_O = \vec{r}_{OC} \times \vec{G} = G\,\vec{r}_{OC} \times \vec{e}_g$$

$$\boxed{G = \sum_i G_i\,, \qquad \vec{r}_{OC} = \frac{1}{G}\sum_i G_i\,\vec{r}_{Oi}}$$

Schwerpunkt eines Körpers

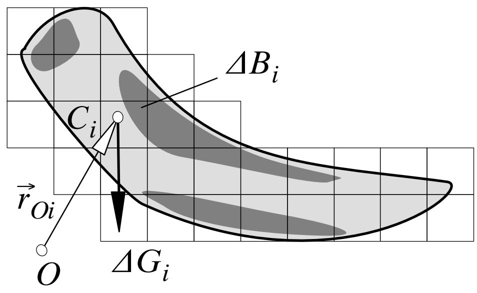
Lösung durch sukzessive Annäherung

n-te Näherung:

$$G \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i$$

$$\vec{r}_{OC} \approx \frac{1}{G} \sum_{i=1}^{n} \Delta G_i \, \vec{r}_{Oi}$$

wobei $C_i \in \Delta B_i$

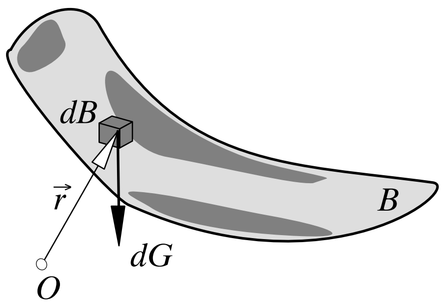


Grenzübergang $n \to \infty$

exakte Lösung:

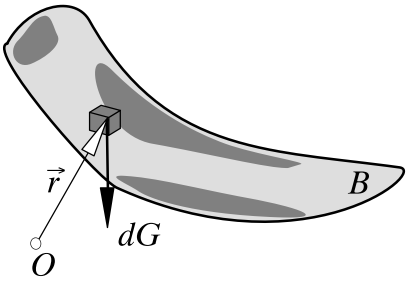
$$G = \int_B dG$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{G} \int_B \vec{r} \, dG$$



6.2 Weitere Mittelpunkte

Schwerpunkt

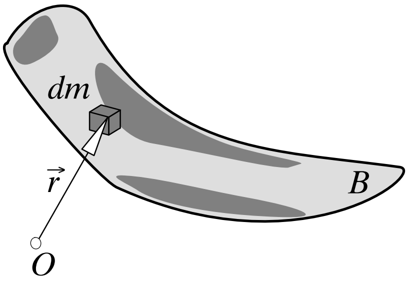


$$G = \int_B dG$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{G} \int_B \vec{r}\, dG$$

$g = const$

Massenmittelpunkt

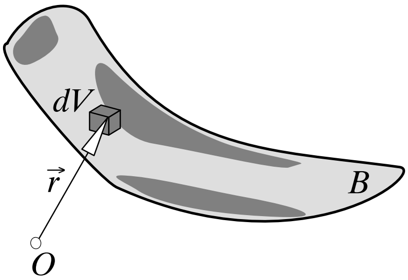


$$m = \int_B dm$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{m} \int_B \vec{r}\, dm$$

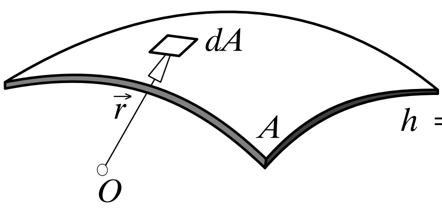
$\rho = const$

Volumenmittelpunkt



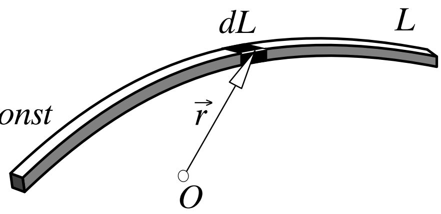
$$V = \int_B dV$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{V} \int_B \vec{r}\, dV$$



$h = const$

$A = const$



Flächenmittelpunkt

$$A = \int_A dA$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{A} \int_A \vec{r}\, dA$$

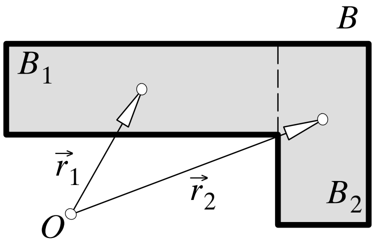
Linienmittelpunkt

$$L = \int_L dL$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{L} \int_L \vec{r}\, dL$$

6.3 Vereinfachte Berechnung

Mittelpunkt eines zusammengesetzten Körpers (z.B. Massenmittelpunkt)

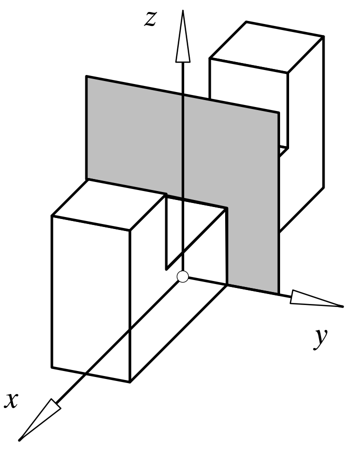


$$m = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_{OC} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

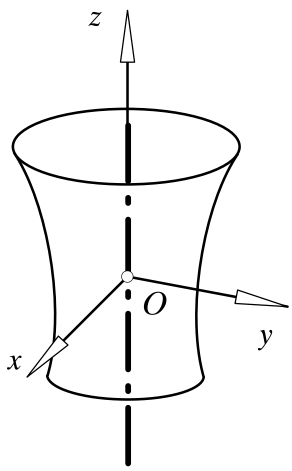
Mittelpunkt eines symmetrischen Körpers

- Symmetrie bez. yz–Ebene



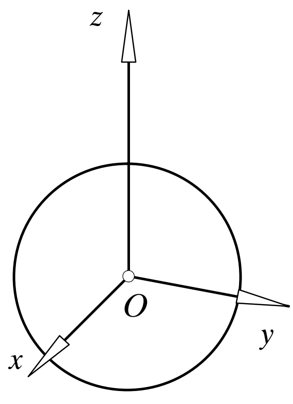
$$x_{OC} = 0$$

- Symmetrie bez. z–Achse



$$x_{OC} = 0$$
$$y_{OC} = 0$$

- Symmetrie bez. Ursprung

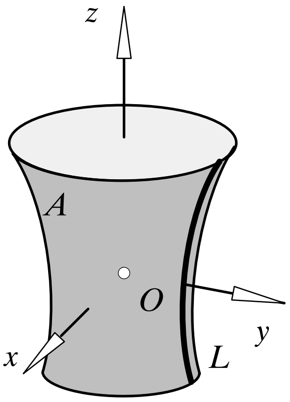


$$x_{OC} = 0$$
$$y_{OC} = 0$$
$$z_{OC} = 0$$

Pappus-Guldin'sche Regeln

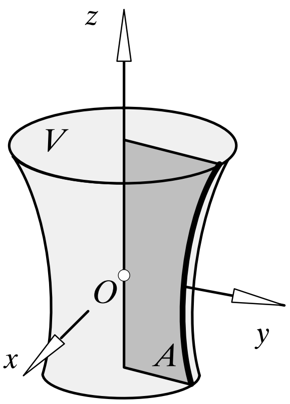
Lassen sich durch Rotation von Linien (Flächen) um ausgewählte Achsen Rotationskörper mit bekannter Oberfläche (Volumen) erzeugen, kann daraus der Linienmittelpunkt (Flächenmittelpunkt) der erzeugenden Linie (Fläche) berechnet werden und umgekehrt.

Linienmittelpunkt



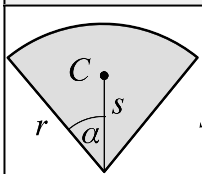
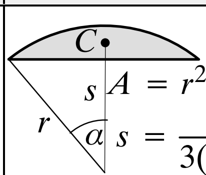
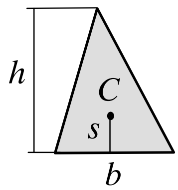
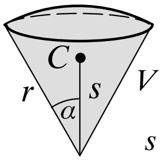
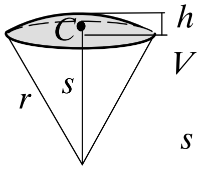
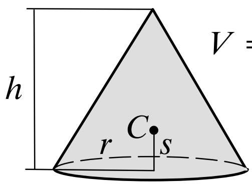
$$y_{OC} = \frac{A}{2\pi L}$$

Flächenmittelpunkt



$$y_{OC} = \frac{V}{2\pi A}$$

Flächen- und Volumenmittelpunkte einfacher Geometrien

Kreisausschnitt (Sektor)	Kreisabschnitt (Segment)	Dreieck
 $A = \alpha r^2$ $s = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$	 $A = r^2(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)$ $s = \frac{2r\sin^3\alpha}{3(\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)}$	 $A = \frac{1}{2} bh$ $s = \frac{h}{3}$
Kugelausschnitt (Sektor)	**Kugelabschnitt (Segment)**	**Kreiskegel**
 $V = \frac{2}{3}\pi r^3(1 - \cos\alpha)$ $s = \frac{3}{8} r(1 + \cos\alpha)$	 $V = \frac{\pi h^2}{3}(3r - h)$ $s = \frac{3}{4}\frac{(2r - h)^2}{3r - h}$	 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ $s = \frac{h}{4}$