5 Gleichgewicht gebundener Systeme

Technische Systeme bestehen aus mehreren miteinander und mit der Umwelt verbundenen Maschinenteilen. Die Bewegung erfolgt über die Lagerfreiheiten, die Verformung der Körper kann i. Allg. vernachlässigt werden. Ein geeignetes Modell zur Untersuchung solcher Systeme sind die Mehrkörpersysteme bestehend aus starren Körpern, Koppelelementen (eingeprägte Kräfte) und idealen Bindungen (Reaktionskräfte).

Bindungen beschränken die Bewegungsmöglichkeiten eines Systems und rufen Lagerreaktionen hervor. Sie werden in technischen Systemen gezielt eingesetzt, um

- gewünschte Arbeitsbewegungen zu erreichen
  (z.B. Mechanismen),
- komplexe räumliche Bewegungen in einfache Teilbewegungen zu zerlegen
  (z.B. Roboter).

5.1 Gleichgewichtsbedingungen

Allgemeines Vorgehen zur Lösung statischer Probleme

1) Zeichnen des Systems mit allen Kräften und Momenten, die auf dieses wirken.

2) Wahl eines geeigneten Koordinatensystems.

3) Gedankliches Einfrieren aller Körper (Teilsysteme) im verformten Zustand (**Erstarrungsprinzip**)

4) Zeichnen des **freigeschnittenen Systems**: Freistellen aller Körper (oder Teilsysteme), Ersetzen der Bindungen durch unbekannte Reaktionen sowie der Kopplungen durch bekannte eingeprägte Kräfte und Momente (Beachte **actio** $\overset{!}{=}$ **reactio**)

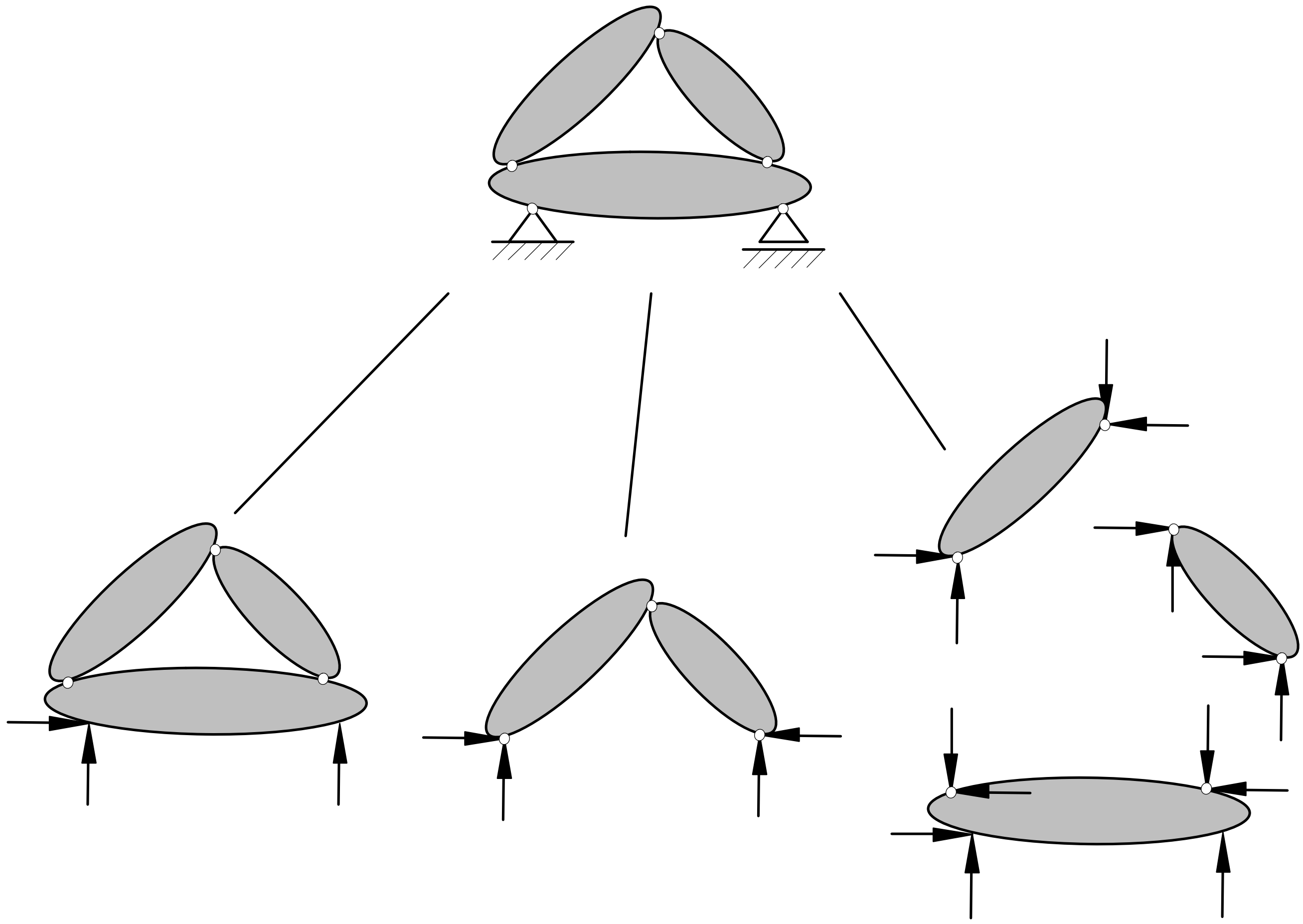
5) Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen für alle Körper (oder Teilsysteme):

	eben: *3 Gleichungen pro Körper*	**räumlich:** *6 Gleichungen pro Körper*
Standard-bedingungen	$\sum F_x = 0$ $\sum F_y = 0$ $\sum M_{Pz} = 0\,,\ P \textit{ willkürlich}$	$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{0}$ $\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{PO_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j = \vec{0}$
Alternativen	$\sum F_x = 0$ $\sum M_{Pz} = 0$ $\sum M_{Qz} = 0$ $P, Q \textit{ willkürlich mit } x_P \neq x_Q$	$\vec{M}_P \overset{!}{=} \vec{0}$ $\vec{M}_Q \overset{!}{=} \vec{0}$ $P, Q \textit{ willkürlich mit } \vec{r}_{PQ} \nparallel \vec{R}$
	$\sum M_{Pz} = 0$ $\sum M_{Qz} = 0$ $\sum M_{Rz} = 0$ $P, Q, R \textit{ nicht auf einer Geraden}$	

6) Lösung der Gleichgewichtsbedingungen in geeigneter Weise. Überprüfung des Ergebnisses auf Plausibilität.

Wahl der Schnitte beim Freischneiden

Zu schneiden sind alle interessierenden Bindungen. Es kann jedoch nötig sein, zusätzliche Schnitte durchzuführen, um aus den Gleichgewichtsbedingungen genügend Gleichungen für die Unbekannten zu erhalten.



teilweise freigeschnittenes System

- 3 Gleichungen für 3 Unbekannte (ausreichend)
- geringer Rechenaufwand

teilweise freigeschnittenes System

- 3 Gleichungen für 4 Unbekannte (nicht ausreichend)

vollständig freigeschnittenes System

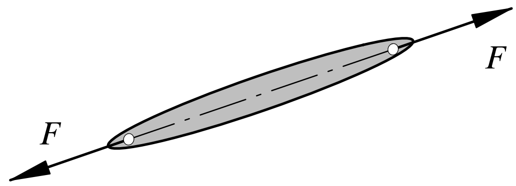
- 9 Gleichungen für 9 Unbekannte (immer ausreichend für statisch bestimmte Systeme)
- hoher Rechenaufwand

Spezialfälle mit vereinfachter Betrachtung

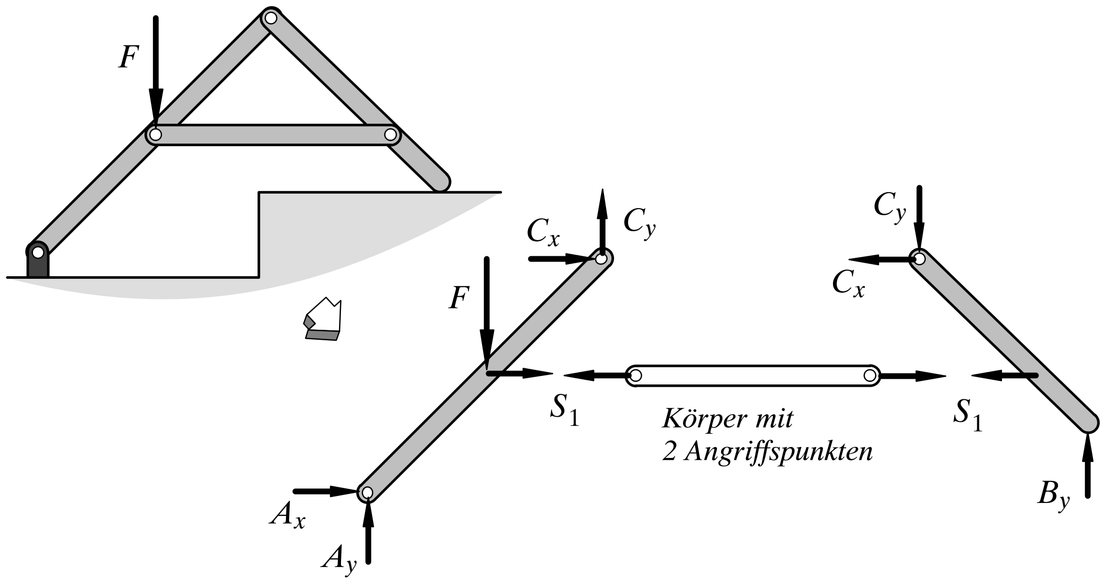
- Körper mit zwei Angriffspunkten

  Zwei Kräfte halten einen Körper nur dann im Gleichgewicht, wenn sie auf einer gemeinsamen Wirkungslinie liegen und entgegengesetzt gleich groß sind.

  Anwendung: Masselose Körper und Fachwerkstäbe mit reibungsfreien Gelenken, Seilaufhängung



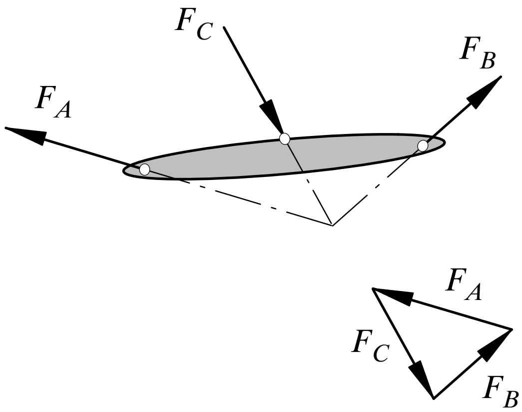
  Beispiel:



- Körper mit drei Angriffspunkten

  Drei Kräfte halten einen Körper im Gleichgewicht, wenn sich ihre Wirkungslinien in einem Punkt schneiden und die Kraftvektoren sich aufheben. Im Fall dreier paralleler Kraftvektoren liegt der Schnittpunkt im Unendlichen.

  Anwendung: Körper mit zwei reibungsfreien Gelenken belastet durch eine resultierende Kraft



5.2 Zusammenhang zwischen Lagerung und mechanischem Modell

Klassifizierung der Lagerung

- $f^u = \sum f_i^u$ Freiheitsgrad des freigeschnittenen Systems
  = Zahl der Gleichgewichtsbedingungen

  2D−Körper: $f_i^u = 3$ (Massenpunkte: $f_i^u = 2$)
  3D−Körper: $f_i^u = 6$ (Massenpunkte: $f_i^u = 3$)

- $n^c = \sum n_j^c$ Zahl aller Bindungen
  = Zahl aller Reaktionen

- n Zahl der unabhängigen Bindungen
  = Zahl der berechenbaren Reaktionen

➧ $f = f^u - n$ verbleibender Freiheitsgrad des gebundenen Systems
  $f = 0$ System kinematisch bestimmt ↔ System unbeweglich
  $f > 0$ System kinematisch unbestimmt ↔ System beweglich

➧ $r = n^c - n$ Zahl der redundanten Bindungen
  $r = 0$ System statisch bestimmt ↔ alle Reaktionen berechenbar
  $r > 0$ System statisch unbestimmt ↔ System klemmt

Hinweise zur praktischen Berechnung:

1) f aus Anschauung $\Rightarrow n = f^u - f, \quad r = n^c - n$

2) r aus Anschauung $\Rightarrow n = n^c - r, \quad f = f^u - n$

Mechanisches Modell

Art der Lagerung	Hilfsmittel zur Berechnung
$r = 0, \quad f = 0$	Stereostatik
$r = 0, \quad f > 0$	Stereostatik+Erstarrungsprinzip oder Stereokinetik
$r > 0, \quad f = 0$	Elastostatik
$r > 0, \quad f > 0$	Elastokinetik

5.3 Einteilung technischer Systeme

Technische Systeme

kinematisch bestimmt

kinematisch unbestimmt

Fachwerke
nur Körper mit zwei Angriffspunkten

Rahmenstrukuren
allg. belastete Körper

Maschinen
Erzielen einer Kraftübersetzung:

$$\lambda = \frac{F_{Ausgang}}{F_{Eingang}}$$

Mechanismen
Übertragung und Wandlung von Bewegung