3 Gleichgewicht freier Körper

Freie Körper treten bei technischen Problemstellungen nur selten auf. Dennoch wird sich deren Betrachtung später bei gebundenen Systemen in Form einer Teilproblemstellung als hilfreich erweisen.

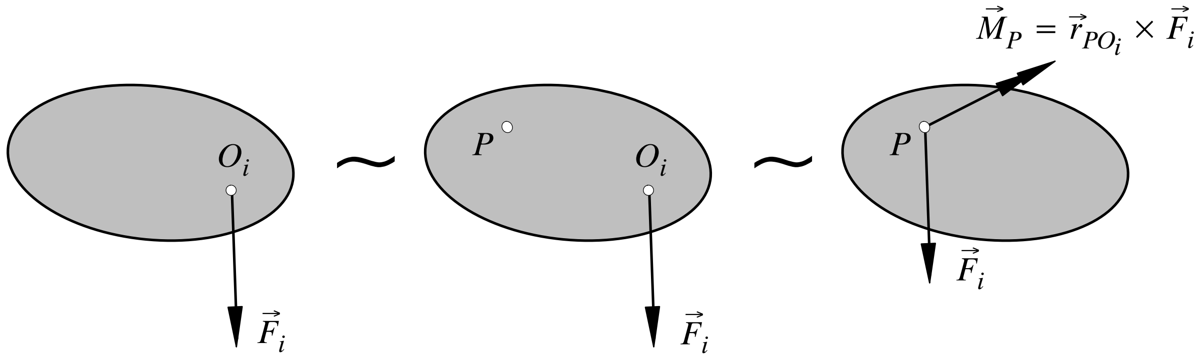
Greifen an einem Körper mehrere Kräfte und Momente an, kann deren Gesamtwirkung bezüglich eines Bezugspunkts elegant durch einen äquivalenten Kraftwinder beschrieben werden. Ein Körper ist dann im Gleichgewicht, wenn dieser Kraftwinder bezüglich eines beliebigen Punktes verschwindet. Daraus ergeben sich bei einer räumlichen Betrachtung sechs Gleichgewichtsbedingungen, die sich bei einer ebenen Betrachtung auf drei reduzieren.

3.1 Kraftwinder

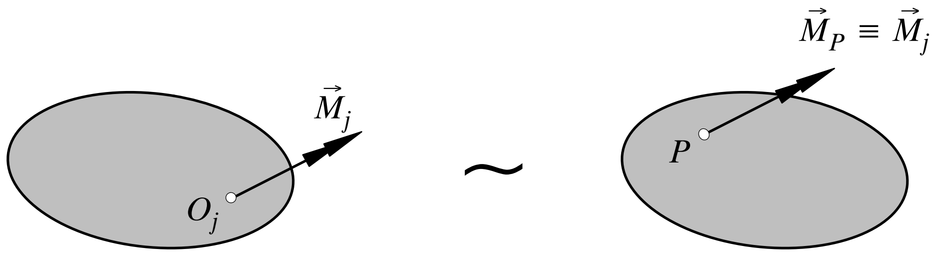
Kräfte haben die Tendenz, Körper zu verschieben, Momente die Tendenz, Körper zu verdrehen. Die Erfahrung zeigt allerdings, dass Kräfte über einen Hebelarm auch Momentenwirkung haben. Zur vollständigen Beschreibung der Gesamtwirkung bezüglich eines allgemeinen Bezugspunkts benötigt man den Begriff des Kraftwinders.

Äquivalenter Kraftwinder

- einer Einzelkraft

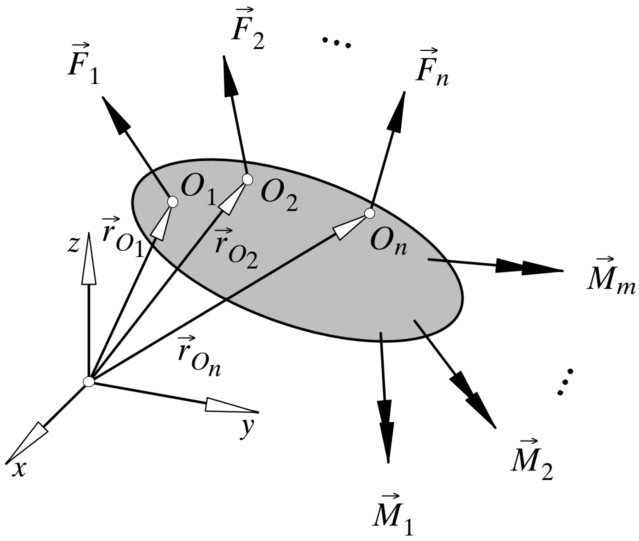


- eines Einzelmoments



3.2 Kräftesysteme

Allgemeine Kräftesysteme

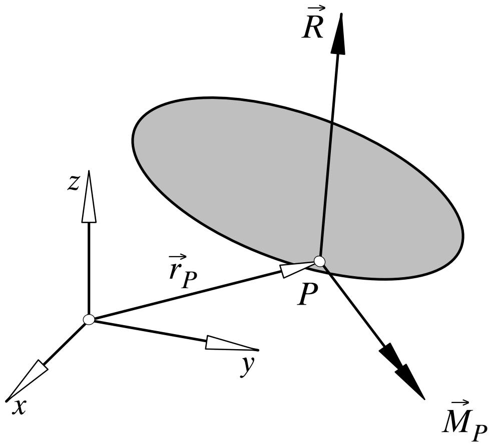


Allgemeine Kräftesysteme bestehen aus

- gebundenen Kraftvektoren $\vec{F}_i$ in den Angriffspunkten O_i
- freien Momentenvektoren $\vec{M}_j$ resultierend aus Kräftepaaren

Invarianzoperationen

Äquivalenter Kraftwinder eines Kräftesystems



Kraftwinder bezüglich eines beliebigen Bezugspunkts P auf oder außerhalb des Körpers

$$\left\{\vec{R},\ \vec{M}_P\right\}$$

resultierendes Moment bez. P

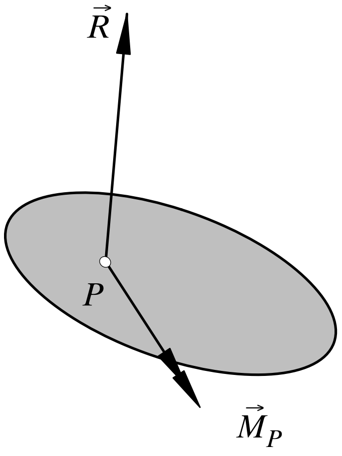
$$\vec{M}_P = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_{PO_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{m} \vec{M}_j$$

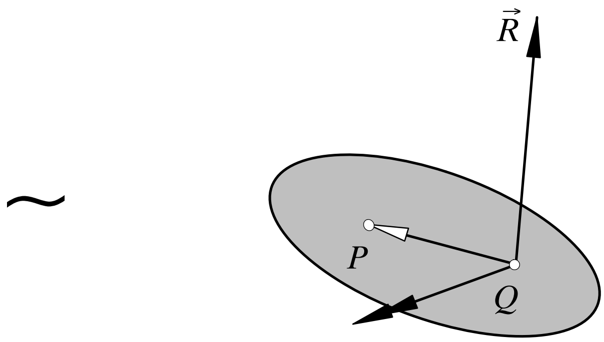
$$\vec{r}_{PO_i} = \vec{r}_{O_i} - \vec{r}_P$$

resultierende Kraft

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Transformation von Kraftwindern auf neue Bezugspunkte

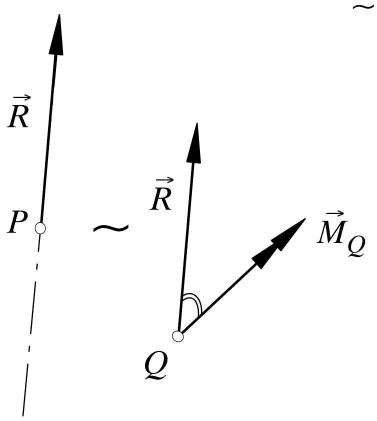




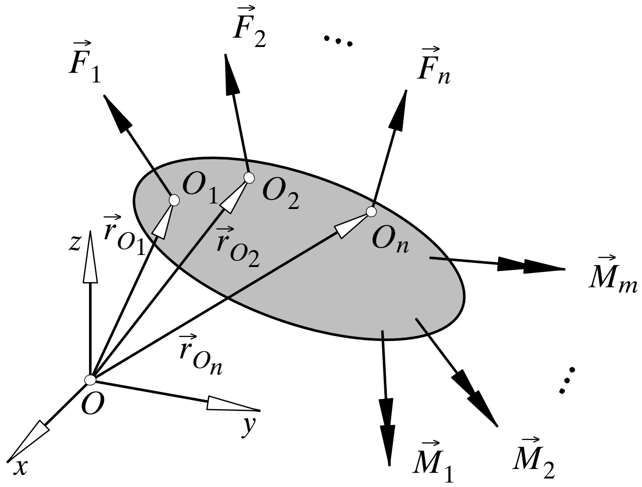
$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \vec{r}_{QP} \times \vec{R}$$

Spezielle Kräftesysteme $\left\{\vec{R},\, \vec{M}_P\right\}$

- $\left\{\vec{0},\, \vec{0}\right\}$ Nullsystem
- $\left\{\vec{0},\, \vec{M}_P\right\}$ System von Kräftepaaren
- $\left\{\vec{R},\, \vec{0}\right\}$ für ein P zentrales Kräftesystem
  (alle Wirkungslinien schneiden sich in einem Punkt P)
  $\sim \left\{\vec{R},\, \vec{M}_Q\right\}$ mit $\vec{M}_Q \perp \vec{R}$ für beliebigen Bezugspunkt Q



3.3 Gleichgewichtsbedingungen



Freier Körper

Ein freier Körper ist im Gleichgewicht, wenn er in Ruhe ist und der Kraftwinder aller an ihm angreifenden Kräfte und Momente bezüglich eines beliebigen Bezugspunkts P verschwindet:

$$\left(\vec F_1, \ldots, \vec F_n, \vec M_1, \ldots, \vec M_m\right) \sim \left\{\vec 0, \vec 0\right\}$$

$$\vec R = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i = \vec 0$$

$$\vec M_P = \sum_{i=1}^{n} \vec r_{PO_i} \times \vec F_i + \sum_{j=1}^{m} \vec M_j = \vec 0$$

für $P \equiv O$

$$\sum F_{x_i} = 0, \quad \sum\left(y_i F_{z_i} - z_i F_{y_i}\right) + \sum M_{x_i} = 0$$

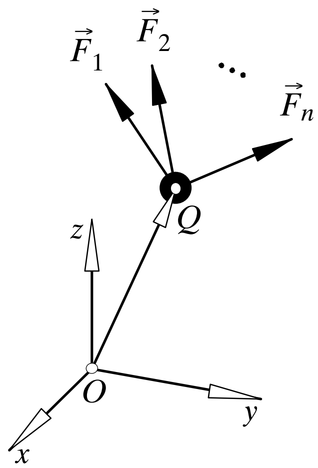
$$\sum F_{y_i} = 0, \quad \sum\left(z_i F_{x_i} - x_i F_{z_i}\right) + \sum M_{y_i} = 0$$

$$\sum F_{z_i} = 0, \quad \sum\left(x_i F_{y_i} - y_i F_{x_i}\right) + \sum M_{z_i} = 0$$

Anstatt des Kräftegleichgewichts $\vec R = \vec 0$ kann auch ein zweites Momentengleichgewicht bezüglich eines weiteren Bezugspunkts Q verwendet werden:

$$\vec M_P \overset{!}{=} \vec 0, \quad \vec M_Q \overset{!}{=} \vec 0 \quad \textit{wobei} \quad \vec r_{PQ} \nparallel \vec R$$

Freier Massenpunkt



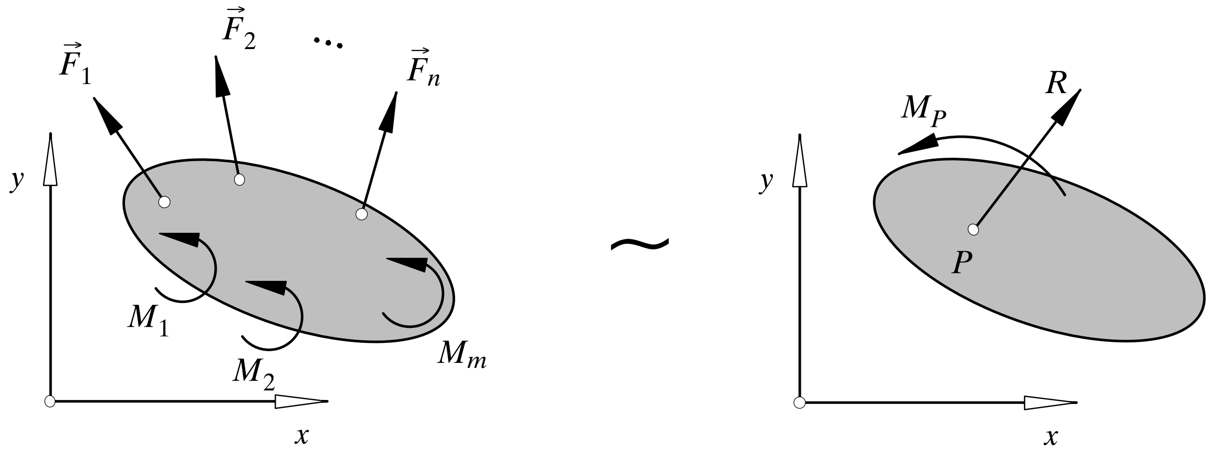
Ein freier Massenpunkt ist im Gleichgewichtszustand, wenn er in Ruhe ist und die resultierende Kraft aller an ihm angreifenden Kräfte verschwindet:

$$\vec R = \sum_{i=1}^{n} \vec F_i = \vec 0$$

Ebene Kräftesysteme

Für viele technische Probleme genügt eine ebene Betrachtung. Dabei wird angenommen, dass alle Kräfte und Angriffspunkte in einer Ebene (z.B. xy−Ebene) liegen und die Momentenvektoren senkrecht zu dieser Ebene stehen, d.h. $z_i = F_{z_i} = M_{x_i} = M_{y_i} = 0$.

Resultierender Kraftwinder



Gleichgewichtsbedingungen

Drei der sechs Gleichgewichtsbedingungen sind automatisch erfüllt, speziell $\sum F_z = 0$, $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$. Daher vereinfachen sich die Gleichgewichtsbedingungen zu:

1) $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_{Pz} = 0$

für einen beliebigen Bezugspunkt P, oder

2) $\sum F_x = 0, \quad \sum M_{Pz} = 0, \quad \sum M_{Qz} = 0$

wobei P und Q verschiedene x-Koordinaten haben, oder

3) $\sum M_{Pz} = 0, \quad \sum M_{Qz} = 0, \quad \sum M_{Rz} = 0$

wobei P, Q und R nicht auf einer Geraden liegen