2 Vektoren in der Mechanik

Viele Größen der Mechanik, in der Statik insbesondere Kraft und Moment, haben die Eigenschaft von Vektoren im dreidimensionalen Raum. Die Mechanik nutzt daher die Methoden und Rechenregeln der Vektoralgebra und Vektoranalysis.

Im Unterschied zur Mathematik sind hinsichtlich ihrer Wirkung jedoch drei verschiedene Klassen von Vektoren zu unterscheiden:

- **freier** Vektor: gegeben durch Betrag und Richtung (Orientierung und Richtungssinn)
  → beliebige Parallelverschiebung möglich

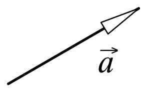
- **linienflüchtiger** Vektor: gegeben durch Betrag, Richtung und Wirkungslinie
  → Verschiebung nur entlang Wirkungslinie möglich

- **gebundener** Vektor: gegeben durch Betrag, Richtung und Angriffspunkt
  → keine Verschiebung möglich

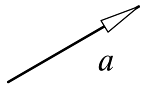
2.1 Notation

Geometrische Darstellung von Vektoren

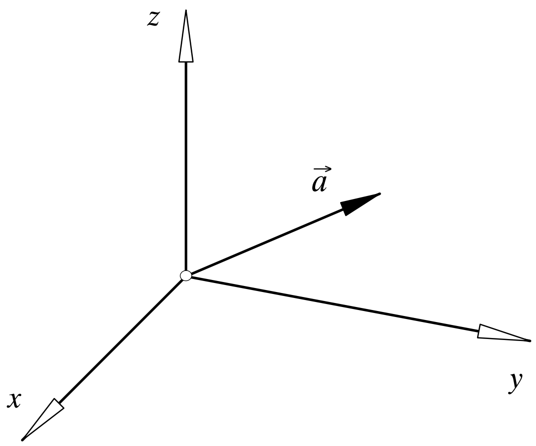
1) als Pfeil mit Vektorsymbol



2) als Pfeil mit vorzeichenbehaftetem Betrag



Koordinatendarstellung eines Vektors



Zerlegung von $\vec{a}$ in Komponenten

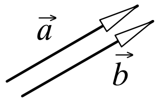
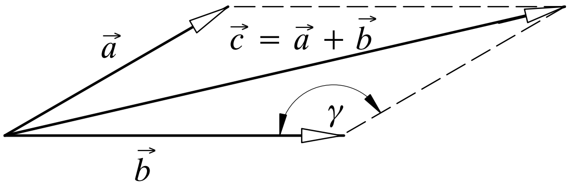
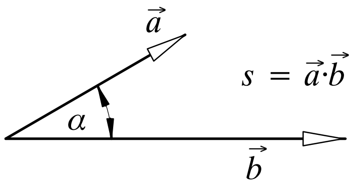
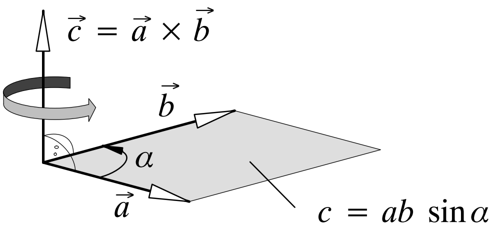
$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

$$= a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}, \qquad |\vec{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Bemerkungen:
- Vektoren sind unabhängig vom Koordinatensystem
- Koordinaten eines Vektors setzen eine eindeutige Festlegung des Koordinatensystems voraus und hängen von dieser ab

2.2 Elementaroperationen der Vektoralgebra

Operation	Geometrische Darstellung	Koordinatendarstellung
Gleichheit	 $\vec{a} = \vec{b}$	$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ $a_x = b_x\,,\ a_y = b_y\,,\ a_z = b_z$
Addition	 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma$ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ $= \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$	$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ $c_x = a_x + b_x\,,$ $c_y = a_y + b_y\,,$ $c_z = a_z + b_z$
Skalarprodukt	 $s = \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\,\cos\alpha$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ $(\vec{a} + \vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$ $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$	$s = \boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}$ $= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ $\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{a} = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ $\cos\alpha = \dfrac{\boldsymbol{a}^T\boldsymbol{b}}{a\,b}$
Vektorprodukt (Kreuzprodukt)	 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}\,(\vec{b}\cdot\vec{c})$	$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}$ $= \det\begin{bmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$

2.3 Kraft und Moment

Kraft

- Kraftbegriff entstammt der täglichen Erfahrung der Muskelanspannung beim Verschieben oder Verformen eines Körpers. Die Kraft ist gekennzeichnet durch Betrag und Richtung, und damit eine Vektorgröße.

- Kraft ist definiert als Wirkung eines Körpers auf einen anderen in direktem Kontakt oder über eine gewisse Entfernung hinweg (z.B. Gravitation)

  → Kraft tritt jeweils als Paar kollinearer, entgegengesetzt gleichgroßer Vektoren auf (actio = reactio)

- Kräfte bewirken Beschleunigung oder Verformung von Körpern

- Im SI−Einheitensystem hat die Kraft die Einheit

$$1\,[\mathrm{N}] = 1\,[\mathrm{kg}] \times 1\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right] = 1\left[\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

- Eigenschaften der Kraft:

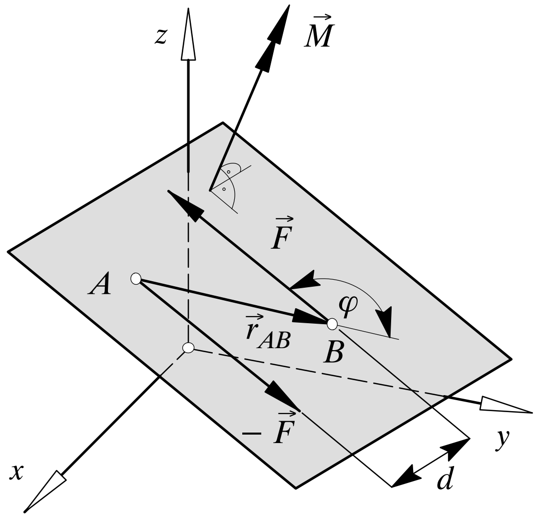
  ◇ Der Kraftvektor hat i. Allg. einen Angriffspunkt (**gebundener Vektor**)

  ◇ In der Starrkörpermechanik darf die Kraft entlang ihrer Wirkungslinie verschoben werden (**linienflüchtiger Vektor**)

  ◇ Für die Untersuchung globaler Effekte können auch verformbare Körper im verformten Zustand eingefroren und als Starrkörper betrachtet werden (**Erstarrungsprinzip**)

Moment

- Momente haben die Tendenz, Körper zu verdrehen. Sie sind gekennzeichnet durch Betrag und Richtung und damit Vektorgrößen.

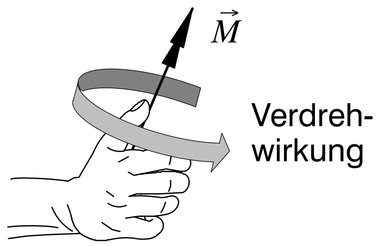


- Momente können durch Kräftepaare dargestellt werden, d.h. Paare entgegengesetzt gleich großer, nicht kollinearer, paralleler Kräfte.

- Das Moment ist ein **freier Vektor** senkrecht zu $\vec{F}$ und $\vec{r}_{AB}$

$$\vec{M} = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} \ ,$$

$$M = F\,d = |\vec{F}|\ |\vec{r}_{AB}|\ \sin\varphi$$

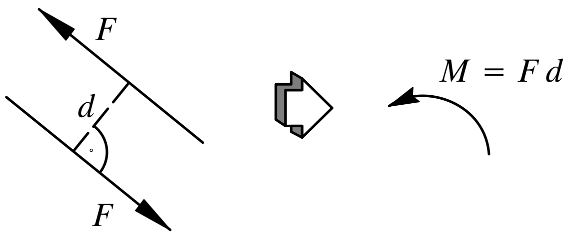


- Im SI−Einheitensystem leitet sich die Einheit des Moments aus $M = F\,d$ ab:

$$1\ [\mathrm{Nm}] = 1\ [\mathrm{N}] \times 1\ [\mathrm{m}]$$

- Die Richtung des Momentenvektors ergibt sich aus der Rechte−Hand−Regel

- Darstellung in ebenen Problemen:



Invarianzoperationen in der Starrkörpermechanik

(1) beliebige Verschiebung von Momentenvektoren

(2) vektorielle Addition und Zerlegung von Momentenvektoren

(3) Verschiebung von Kraftvektoren entlang ihrer Wirkungslinie

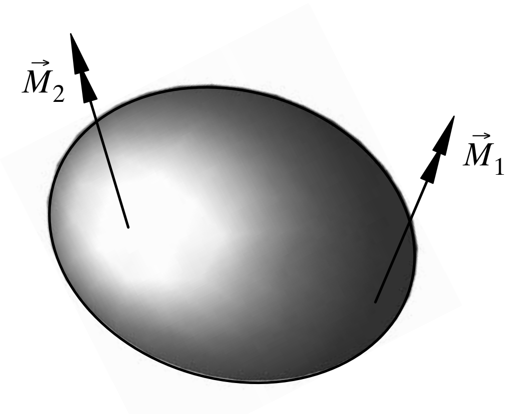
(4) vektorielle Addition von Kraftvektoren mit gemeinsamem Angriffspunkt

(5) Zerlegung von Kraftvektoren in Komponenten mit gemeinsamem Angriffspunkt

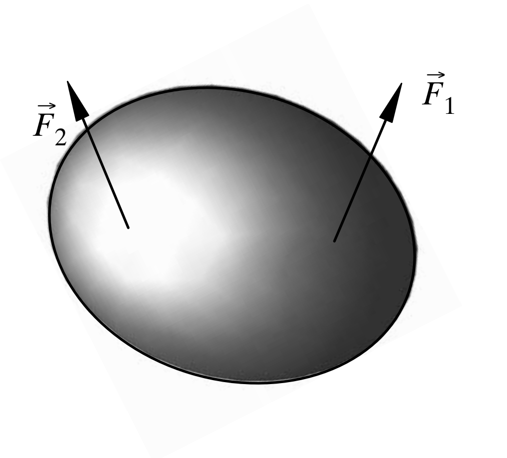
(6) Einführung von Nullvektoren

Beispiele:

- Addition zweier Momente



- Addition zweier Kräfte mit sich schneidenden Wirkungslinien



- Addition zweier paralleler Kräfte