



Brandenburgische  
Technische Universität  
Cottbus - Senftenberg

**D. Bestle**

Technische Mechanik I

# **Statik und Festigkeitslehre**

Arbeitsunterlagen zur Vorlesung



Lehrstuhl  
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik  
Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle

<b>Vektoren</b>	Addition	$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{bmatrix}$
	Skalarprodukt	$\mathbf{a}^T \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
	Vektorprodukt	$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ -a_x b_z + a_z b_x \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$

### Gleichgewichtsbedingungen

eben: 3 Gleichungen	räumlich: 6 Gleichungen
$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum M_{Pz} = 0$ <i>P willkürlich</i>	$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{0},$ $\vec{M}_P = \sum_{i=1}^n \vec{r}_{PO_i} \times \vec{F}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = \vec{0}$
$\sum F_x = 0, \sum M_{Pz} = 0, \sum M_{Qz} = 0$ <i>P, Q willkürlich mit <math>x_P \neq x_Q</math></i>	$\vec{M}_P \stackrel{!}{=} \vec{0}, \vec{M}_Q \stackrel{!}{=} \vec{0}$ <i>P, Q willkürlich mit <math>\vec{r}_{PQ} \parallel \vec{R}</math></i>
$\sum M_{Pz} = 0, \sum M_{Qz} = 0, \sum M_{Rz} = 0$ <i>P, Q, R nicht auf einer Geraden</i>	

<b>Kräfte</b>	Feder	$F = c(l - l_0), M = c_T(\varphi - \varphi_0)$
	Gewichtskraft	$G = mg$
	Gleitreibung	$R = \mu N$ bzw. $F_2/F_1 = e^{\mu \varphi}$ entgegen $v_{rel}$
	Haftreibung	aus Gleichgewichtsbedingungen, Grenzen $ R  \leq \mu_0 N$ bzw. $e^{-\mu_0 \varphi} \leq F_2/F_1 \leq e^{\mu_0 \varphi}$

<b>Mittelpunkte</b>	Definition z.B.	$\vec{r}_{OC} = \frac{1}{m} \int_B \vec{r} dm, \quad m = \int_B dm$
	zusammengesetzte Körper	$\vec{r}_{OC} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad m = m_1 + m_2$
	Pappus–Guldin'sche Regeln	$y_{OC} = \frac{A}{2\pi L}, \quad y_{OC} = \frac{V}{2\pi A}$

<b>Flächenmomente</b>		$I_y = \int_A z^2 dA, \quad I_z = \int_A y^2 dA,$
		$I_{yz} = - \int_A yz dA, \quad I_p = \int_A r^2 dA = I_y + I_z$
	Huygens-Steiner-Bez.	$I_y^* = I_y + z_0^2 A, \quad I_z^* = I_z + y_0^2 A$ $I_{yz}^* = I_{yz} - y_0 z_0 A, \quad I_p^* = I_p + (y_0^2 + z_0^2) A$
	zusammengesetzte Flächen	$I_{Oy} = \sum_i I_{Oy_i}, \quad I_{Oz} = \sum_i I_{Oz_i},$ $I_{Oyz} = \sum_i I_{Oyz_i}$

**Spannungen** Zug/Druck

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

Schub

$$\tau = \frac{Q}{A}$$

Torsion

$$\tau = \frac{M}{I_p} r$$

Biegung

$$\sigma = \frac{M}{I_y} z$$

**Dehnungen** Zug/Druck

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_l = \frac{\Delta R}{R} = -\nu \varepsilon,$$

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{EA(x)} dx$$

Torsion

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad \Delta\varphi = \int_0^L \frac{M(x)}{GI_p(x)} dx$$

**Balken**

Querkraftverlauf

$$Q(x) = - \int_0^x p(\xi) d\xi - \sum_i F_i \langle x - \xi_i \rangle^0$$

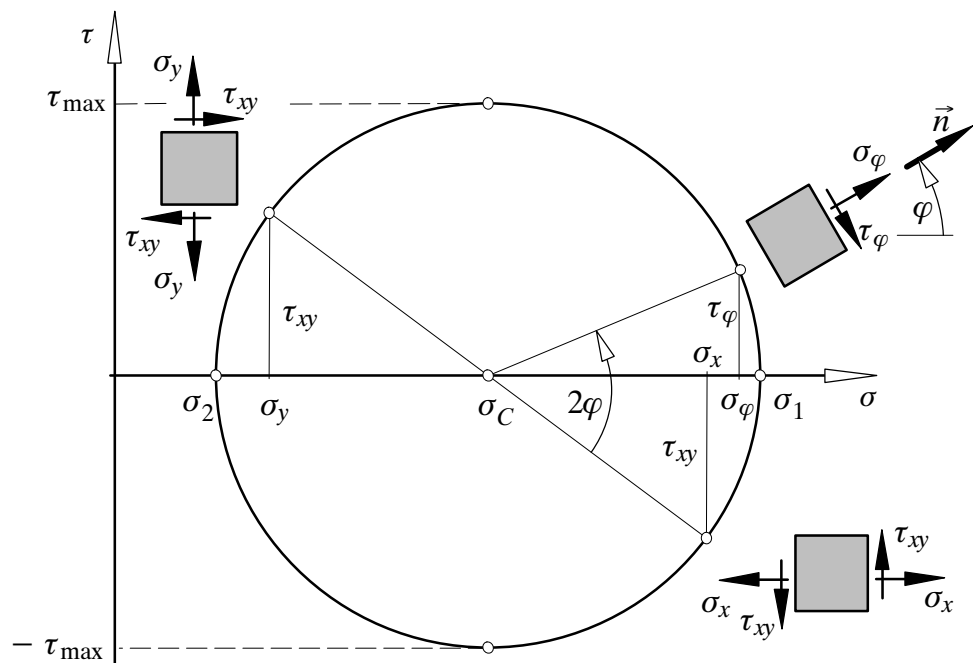
Momentenverlauf

$$M(x) = \int_0^x Q(\xi) d\xi - \sum_i M_i \langle x - \xi_i \rangle^0$$

Biegelinie

$$EI_y w'' = -M$$

**Mohrscher Spannungskreis**



**Festigkeitsberechnung**

$$\sigma_v \leq \sigma_{zul} = \frac{K}{S}, \quad K = \begin{cases} R_e & \text{Fließen} \\ R_m & \text{Bruch} \end{cases}$$

Normalspannungshypothese

$$\sigma_v = \sigma_{\max}$$

Schubspannungshypothese

$$\sigma_v = 2 \tau_{\max} = \sigma_{\max} - \sigma_{\min}$$

**Knickung**

$$F \leq F_k = \alpha \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

fest-frei

$$\alpha = 0.25$$

gelenkig-gelenkig

$$\alpha = 1$$

fest-gelenkig

$$\alpha = 2.046$$

fest-fest

$$\alpha = 4$$

# Inhalt

<b>Inhalt</b> .....	<b>1</b>
<b>Literatur</b> .....	<b>3</b>
<b>1 Modellbildung in der Mechanik</b> .....	<b>5</b>
1.1 Modelle der Mechanik .....	6
1.2 Mechanische Größen .....	8
1.3 Physikalische Maßeinheiten .....	9
<b>2 Vektoren in der Mechanik</b> .....	<b>11</b>
2.1 Notation .....	12
2.2 Elementaroperationen der Vektoralgebra .....	13
2.3 Kraft und Moment .....	14
<b>3 Gleichgewicht freier Körper</b> .....	<b>17</b>
3.1 Kraftwinder .....	18
3.2 Kräftesysteme .....	19
3.3 Gleichgewichtsbedingungen .....	21
<b>4 Gleichgewicht gebundener Körper</b> .....	<b>23</b>
4.1 Bindungen .....	24
4.2 Freischneiden und Gleichgewichtsbedingungen .....	25
4.3 Einteilung von Kräften .....	27
<b>5 Gleichgewicht gebundener Systeme</b> .....	<b>29</b>
5.1 Gleichgewichtsbedingungen .....	30
5.2 Zusammenhang zwischen Lagerung und mechanischem Modell .....	33
5.3 Einteilung technischer Systeme .....	34
<b>6 Schwerpunkt und andere Mittelpunkte</b> .....	<b>35</b>
6.1 Gewichtskraft und Schwerpunkt .....	36
6.2 Weitere Mittelpunkte .....	38
6.3 Vereinfachte Berechnung .....	39
<b>7 Reibung</b> .....	<b>41</b>
7.1 Mechanik der trockenen Reibung .....	42
7.2 Analyse von Reibungsproblemen .....	44
7.3 Seilreibung .....	46
<b>8 Fachwerke</b> .....	<b>47</b>
8.1 Idealisierungen .....	48
8.2 Klassifizierung .....	49
8.3 Analyse von Fachwerken .....	50

<b>9 Innere Balkenbelastung</b> .....	<b>53</b>
9.1 Innere Kräfte und Momente .....	54
9.2 Querkraft– und Biegemomentenverlauf .....	55
9.3 Föppl–Symbol für unstetige Belastung .....	57
<b>10 Spannungen</b> .....	<b>59</b>
10.1 Normalspannungen .....	60
10.2 Schubspannungen .....	61
10.3 Ebener Spannungszustand .....	62
<b>11 Verzerrungen</b> .....	<b>65</b>
11.1 Dehnungen .....	66
11.2 Gleitungen .....	68
11.3 Werkstoffeigenschaften .....	70
<b>12 Technische Biegelehre</b> .....	<b>71</b>
12.1 Flächenträgheitsmomente .....	72
12.2 Biegespannung und -dehnung .....	75
12.3 Schubspannungen bei gerader Biegung .....	77
<b>13 Biegelinie</b> .....	<b>79</b>
13.1 Differentialgleichung der Biegelinie .....	80
13.2 Berechnung der Biegelinie .....	82
13.3 Superpositionsmethode .....	84
<b>14 Überlagerung einfacher Belastungsfälle</b> .....	<b>85</b>
14.1 Superpositionsprinzip und Festigkeitshypothesen .....	86
14.2 Schiefe Biegung .....	88
14.3 Exzentrische Axialbelastung .....	90
<b>15 Knickung</b> .....	<b>91</b>
15.1 Knickgleichung .....	92
15.2 Verschiedene Knickfälle .....	93
15.3 Auslegung von Druckstäben .....	94

## Literatur

1. Beer, Johnston, Mazurek: *Vector Mechanics for Engineers, Statics and Dynamics*. McGraw Hill, 2015.
2. H. Dietmann: *Einführung in die Elastizitäts- und Festigkeitslehre*. Alfred Kröner Verlag, 1992.
3. Heinrich Dubbel: *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, 2014.
4. U. Gamer, W. Mack: *Mechanik*. Wien: Springer, 1999.
5. J.M. Gere, S.P. Timoshenko: *Mechanics of Materials*. Stanley Thornes, 1999.
6. D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, W. Wall: *Technische Mechanik 1 – Statik*. Springer, 2016.
7. D. Gross, W. Hauger, J. Schröder, W. Wall: *Technische Mechanik 2 – Elastostatik*. Springer, 2014.
8. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 1 – Statik*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.
9. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 2 – Festigkeitslehre*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.
10. R.C. Hibbeler: *Technische Mechanik 1 – Statik. 2 – Festigkeitslehre*. München: Pearson Deutschland, 2013.
11. S. Kessel, D. Fröhling: *Technische Mechanik, Fachbegriffe im deutschen und englischen Kontext*. Stuttgart: Teubner, 1998.
12. A. Kühhorn und G. Silber: *Technische Mechanik für Ingenieure*. Heidelberg: Hüthig, 2000.
13. K. Magnus, H.H. Müller–Slany: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Springer, 2005.
14. J.L. Meriam, L.G. Kraige, J.N. Bolton: *Engineering Mechanics, Statics*. Wiley, 2014.
15. W.H. Müller, F. Ferber: *Technische Mechanik für Ingenieure*. Fachbuchverlag Leipzig im Carl–Hanser–Verlag, 2012.
16. W.F. Riley, L.D. Sturges: *Engineering Mechanics, Statics*. New York: Wiley, 1996.
17. W.F. Riley, L.D. Sturges, D.H. Morris: *Statics and Mechanics of Materials*. Wiley, 2002.

# Sachwortverzeichnis

## A

Angriffspunkt, 11 , 14

## B

Balken, 53 , 59 , 71 , 79

Bezugspunkt, 18 , 20

Biegedehnung, 75

Biegelinie, 79

Differentialgleichung, 80

Biegemoment, 53 , 54

Biegemomentenverlauf, 55 , 57

Biegespannung, 75

Biegung, 71

gerade, 76 , 81

reine, 75 , 80

schiefe, 88

Bindung, 23 , 24 , 26 , 29 , 33

Wertigkeit, 24

## C

Coulomb'sche Reibung, 42

## D

Dehnung, 65 , 66

Axial-, 66

Quer-, 66

Deviationsmoment, 72

## E

Ebener Spannungszustand, 62

Einheit

abgeleitete, 9 , 10

alternative, 10

Grund-, 9

kohärente, 5

Einheitensystem, 5 , 9

SI-, 9

U.S.-, 9

elastisch, 70

Elastizität, 67

Elastizitätsmodul, 65 , 66

Erstarrungsprinzip, 14

Euler'sche Knickfälle, 93

## F

Fachwerk, 34 , 47

eben, 49

einfach, 49

räumlich, 49

Festigkeitsberechnung, 60 , 87

Festigkeitshypothese, 87

Flächenträgheitsmoment, 72

Hauptachsen, 74

polares, 69 , 72

Transformation, 73

zusammengesetzte Flächen, 74

Föppl-Symbol, 57

Freiheitsgrad, 24 , 33

Freischneiden, 23 , 25 , 31 , 44

## G

Gleichgewicht, 17 , 23 , 29

indifferentes, 91

instabiles, 91

stabiles, 91

Gleichgewichtsbedingung, 17

ebenes Kräftesystem, 22

freier Körper, 21

freier Massenpunkt, 21

gebundener Körper, 25

System, 30

Gleitreibung, 42

Gleitung, 65 , 68

## H

Haftreibung, 42

Hauptspannung, 64

homogen, 70

Hooke'sches Gesetz, 66 , 68

Huygens-Steiner Beziehung, 73



## I

Invarianzoperationen, 16  
isotrop, 70

## K

Kern, 90  
Knicklast, 92  
Knickung, 91  
Knotenpunktsverfahren, 47 , **50**  
Kompatibilitätsbedingung, 83  
Kontinuitätsbedingung, 83  
Koordinatensystem, 12  
Körperkontakt, 41  
Kraft, **14**  
  äußere, 27  
  eingeprägte, 23 , 27  
  Einzel-, 27  
  Feder-, 27  
  Gewichts-, 27 , 35 , **36**  
  innere, 27 , 54  
  Linien-, 27  
  Oberflächen-, 27  
  Reaktions-, 24 , 27  
  verteilte, 27  
  Volumen-, 27  
Kräftesystem, 19  
  Kräftepaare, 20  
  Nullsystem, 20  
  zentrales, 20  
Kraftwinder, 17 , **18**  
  äquivalenter, 19  
  Transformation, 20  
Kreuzprodukt. *Siehe* Vektorprodukt

## L

Lagerreaktion, 23

## M

Maschine, 34  
Maßeinheit. *Siehe* Einheitensystem  
Mechanismus, 34  
Mehrkörpersystem, 29  
Mittelpunkt, 35 , 38  
  Flächen-, 38  
  Linien-, 38

symmetrischer Körper, 39  
Volumen-, 38  
zusammengesetzter Körper, 39

Modellbildung, 5 , 6

Mohr'scher Spannungskreis, 59 , 63 , **64**

Moment, **15** , 24  
  äußeres, 27  
  eingepprägtes, 23 , 27  
  Feder-, 27  
  inneres, 27 , 54  
  Reaktions-, 27

## N

Normalkraft, 41 , 53 , 54  
Normalspannung, 59 , 60  
Nullstab, 47 , **52**

## P

Pappus–Guldin'sche Regeln, 40  
Poisson'sche Zahl, 65 , 66

## Q

Querdehnzahl. *Siehe* Poisson'sche Zahl  
Querkraft, 53 , 54  
Querkraftverlauf, 55 , 57

## R

Rahmenstruktur, 34  
Randbedingung, 82  
Rechte–Hand–Regel, 15  
Reibung, **41**  
  Gleit-. *Siehe* Gleitreibung  
  Haft-. *Siehe* Haftreibung  
  Seil-. *Siehe* Seilreibung  
Reibungskegel, 43  
Reibungskoeffizient, 43  
Ritter'sches Schnittverfahren, 47 , **51**

## S

Schlankheitsgrad, 94  
Schub, 59 , 61  
Schubmodul, 65 , 66 , 68  
Schubspannung, 59 , 61 , 77



Schwerpunkt, **35** , **36**  
  Körper, 37  
  Massenpunktsystem, 36

Seilreibung, 46

Selbsthemmung, 45

Sicherheitsbeiwert, 60

Skalar, 8

Skalarprodukt, 13

Spannung, **59**  
  zulässige, 60

Spannungs–Dehnungs–Diagramm, 65

Stabverlängerung, 67

Steifigkeit, 67  
  Torsions–, 69

Streckgrenze, 60 , 65

Superpositionsprinzip, 84 , 85 , 86

System  
  freigeschnittenes, 30  
  kinematisch bestimmt, 33 , 34  
  Kräfte–. *Siehe* Kräftesystem  
  Mehrkörper–. *Siehe* Mehrkörpersystem  
  statisch bestimmt, 33

## T

Torsion, 59 , 61 , 68

## V

Vektor, **8** , **11**  
  Darstellung, 12  
  freier, 11 , 15  
  gebundener, 11 , 14  
  linienflüchtiger, 11 , 14

Vektoralgebra, 13

Vektorprodukt, 13

Vergleichsspannung, 85

Verzerrung, 65

## W

Wertigkeit, 24

Wirkungslinie, 11 , 14

## Z

Zugfestigkeit, 60 , 65



Brandenburgische  
Technische Universität  
Cottbus - Senftenberg

**D. Bestle**

Technische Mechanik I

# **Statik und Festigkeitslehre**

Übungen zur Vorlesung



Lehrstuhl  
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik  
Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle