

6 Nichtlineare Schwingungen

6.1 Motivation

Anfang des 19. Jahrhunderts formulierte der französische Mathematiker Pierre-Simon Laplace die These, dass man den Lauf der Welt für alle Zeiten berechnen könne, wenn man seinen Zustand nur exakt genug kennen würde (Laplacescher Dämon). Dieser Glaube an den Determinismus wirkt bis heute in der Astrologie nach, wenn Menschen horoskopischen Vorhersagen Bedeutung zumessen. Für lineare Systeme gibt es tatsächlich ein geschlossenes mathematisches Konzept, um aus den Anfangsbedingungen analytisch die Lösung für alle Zeiten zu berechnen. Nichtlineare Systeme können jedoch lokale Instabilitäten beinhalten, so dass bereits geringfügigste Variationen der Anfangsbedingungen zu völlig anderem Verhalten führen und dieses trotz deterministischer Beschreibung als unvorhersagbar erscheint. Man bezeichnet solches Verhalten daher auch als chaotisch. Der Versuch soll unterschiedliche Schwingungsphänomene aufzeigen und demonstrieren, dass auch in chaotischem Verhalten erkennbare Muster verborgen sein können.

6.2 Versuchsvorbereitung

In Vorbereitung auf den Praktikumsversuch sind die folgenden theoretischen Überlegungen nachzuvollziehen und die Vorbereitungsfragen schriftlich auszuarbeiten. Ohne diese Grundkenntnisse können die Versuche nicht geeignet durchgeführt werden, weshalb Kandidaten bei ungenügender Vorbereitung vom Versuch ausgeschlossen werden.

6.2.1 Mathematisches Pendel

Das einfachste nichtlineare System ist das mathematische Pendel oder Punktpendel in Bild 6.1. Dieses besteht aus einem Massenpunkt (Masse m) an einer masselosen Pendelstange (Länge l). Berücksichtigt man Lagerreibung und Luftwiderstand in Form eines linearen Drehdämpfers (Dämpferkonstante d), lautet die beschreibende Differentialgleichung

$$ml^2\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + mgl \sin \varphi = 0. \quad (6.1)$$

Die Gleichgewichtslage $\varphi = \text{const.} := \bar{\varphi}$ ergibt sich mit $\dot{\varphi} = \ddot{\varphi} = 0$ nach Einsetzen in (6.1) aus

$$\sin \bar{\varphi} = 0. \quad (6.2)$$

Für beliebige Anfangsauslenkungen φ_0 ergeben sich reguläre, abklingende Schwingungen, chaotische Schwingungen sind bei nur einem Freiheitsgrad nicht möglich.

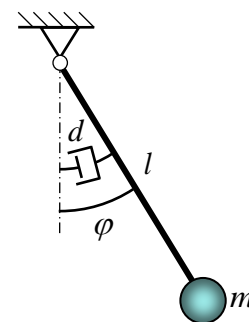


Bild 6.1 Mathematisches Pendel

6.2.2 Rüttelpendel

Bewegt man den Aufhängepunkt des mathematischen Pendels harmonisch in vertikale Richtung, entsteht das sogenannte Rüttelpendel mit der Gleichung

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l} \Omega^2 \cos \Omega t \right) \sin \varphi = 0 \quad \text{mit } \Omega = 2\pi f. \quad (6.3)$$

Durch das Rütteln kann man Einfluss auf das Stabilitätsverhalten des Pendels ausüben.

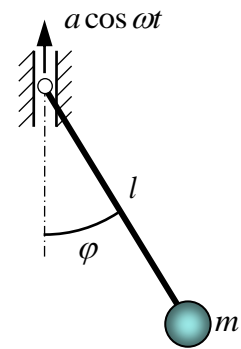


Bild 6.2 Rüttelpendel

6.2.3 Dreifachpendel

Durch Aneinanderhängen von drei Pendeln entsteht ein Mehrkörpersystem mit drei Freiheitsgraden, das interessante Schwingungserscheinungen zeigt: die statisch stabile Gleichgewichtslage kann dynamisch instabil werden und selbst chaotische Schwingungen sind möglich.



Bild 6.3 Dreifachpendel

6.2.4 Harmonisch erregtes Federpendel

Das einfachste System, das zu chaotischen Schwingungen fähig ist, besteht aus einem 1-Freiheitsgrad-Schwinger und einer zeitabhängigen Erregung $u(t)$. Bild 6.4 zeigt eine Scheibe mit Messinggewicht (Gesamtmasse m , Trägheitsmoment I bez. Drehpunkt), die exzentrisch gelagert (Exzentrizität ε) und dadurch wie ein Pendel wirkt. Diese wird durch zwei Federn (jeweils Steifigkeit c , Hebel R) stabilisiert, deren Fußpunkte harmonisch bewegt sind (Amplitude a , Erregerfrequenz ω). Mithilfe von Wirbelstrombremsen wird die Drehschwingung der Scheibe gedämpft (Dämpferkonstante d). Die Differentialgleichung lautet

$$I\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + 2cR^2\varphi - mg\varepsilon \sin \varphi = 2cRa \cos \Omega t. \quad (6.4)$$

Mit den Abkürzungen

$$\delta = \frac{d}{2I}, \quad \omega_c^2 = \frac{2cR^2}{I}, \quad \omega_p^2 = \frac{mg\varepsilon}{I}, \quad \lambda = \frac{a}{R} \quad (6.5)$$

vereinfacht sich Gleichung (6.4) zu

$$\ddot{\varphi} + 2\delta\dot{\varphi} + \omega_c^2\varphi - \omega_p^2 \sin \varphi = \lambda\omega_c^2 \cos \Omega t. \quad (6.6)$$

Für bestimmte Parameterwerte zeigen sich chaotische Schwingungen, z.B.

$$\delta = 0.74, \quad \omega_c^2 = 115, \quad \omega_p^2 = 190, \quad \lambda = 0.5, \quad \Omega = 10.6 \text{ rad/s}. \quad (6.7)$$

Solche Schwingungen sind allerdings nicht völlig regellos, sondern zeigen Muster, die man als seltsame Attraktoren bezeichnet und im Rahmen des Versuchs untersucht werden sollen.

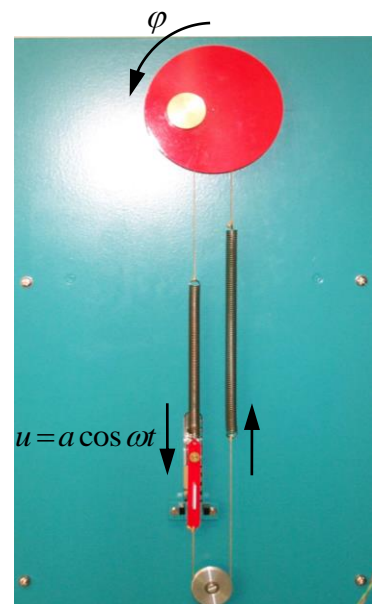


Bild 6.4 Chaospendel

6.3 Vorbereitungsfragen

- Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Punktpendels aus Gleichung (6.2). Erklären Sie diese physikalisch.
- Wie sind Periode und Amplitude einer Schwingung definiert?
- Zeigen Sie, dass die Gleichgewichtslagen des Rüttelpendels identisch mit denen des mathematischen Pendels sind.
- Was ist ein Mehrkörpersystem? Was versteht man unter Freiheitsgrad? Welchen Freiheitsgrad hat das mathematische Pendel (6.1)?
- Bestimmen Sie die Gleichgewichtslagen des Systems (6.6),(6.7) ohne Anregung, d.h. für $\lambda=0$ (Hinweis: Lösen Sie die entstehende nichtlineare Gleichung graphisch).
- Was versteht man unter Grenzykel, Seltsamem Attraktor, Fraktal, Selbstähnlichkeit?

6.4 Versuchsdurchführung

Warnung vor Verletzungsrisiken und Beschädigungsgefahren:

- Das Einzelpendel ist sehr dünn und kann leicht verformt werden; daher nicht in schwingendes Pendel greifen oder quer zur Schwingebene belasten!
- Die Pendel des Dreifachpendels sind scharfkantig; daher nicht in die schwingenden Pendel greifen, sondern ausschwingen lassen!
- Nicht in Erregung des Chaospendels oder Rüttelpendels greifen!

6.4.1 Mathematisches Pendel

6.4.1.1 Wo liegen die mathematisch errechneten Gleichgewichtslagen geometrisch? Testen Sie deren Stabilitätseigenschaften experimentell.

6.4.1.2 Lassen Sie das Pendel aus der Anfangslage $\varphi_0 \approx 170^\circ$ (Messbereichsgrenze) frei ausschwingen und zeichnen Sie die Schwingung durch Start des Simulationsprogramms `PunktPendel.mdl` auf (stoppen Sie das Programm, nicht das Pendel, sobald das Pendel nur noch kleine Amplituden von ca. 20° hat). Bestimmen Sie aus den Messdaten mithilfe von Matlab die in der Schwingung enthaltenen Perioden T_i als doppelte Abstände jeweils zweier aufeinanderfolgender Nulldurchgänge sowie die Amplituden $\hat{\varphi}_i$ aus den Maxima/Minima der jeweils dazwischen liegenden Schwingungsbögen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen T_i und $\hat{\varphi}_i$?

6.4.2 Rüttelpendel

6.4.2.1 Rütteln Sie das Pendel in der unteren Gleichgewichtslage mit zunehmender Frequenz. Bei welcher Frequenz wird das Pendel instabil?

$$f = \text{-----}.$$

- 6.4.2.2 Rütteln Sie das Pendel in der oberen Gleichgewichtslage mit zunehmender Frequenz (Fixieren Sie das Pendel locker zwischen Daumen und Zeigefinger; falls Sie das Pendel verlieren, Hand sofort zurückziehen). Bei welcher Frequenz wird das Pendel stabil?

$$f = \text{-----} .$$

6.4.3 Dreifachpendel

- 6.4.3.1 Welche Gleichgewichtslagen hat das Dreifachpendel? Welche sind statisch stabil?
- 6.4.3.2 Was passiert bei folgenden Anfangsbedingungen mit kleinen Auslenkungen der kleinen Pendel? Wie erklärt sich der Einfluss auf das große Pendel?

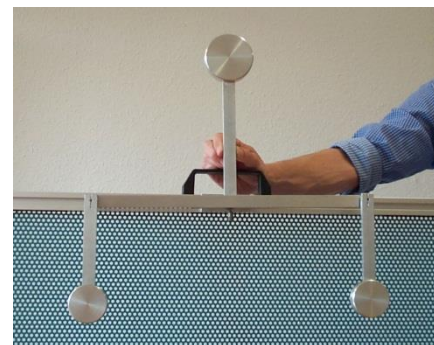


symmetrische Auslenkung



asymmetrische Auslenkung

- 6.4.3.3 Welche Bewegung ergibt sich bei nebenstehender Anfangsbedingung? Beobachten Sie die Reihenfolge und Zahl der Überschläge der kleinen Pendel und versuchen Sie den Versuch exakt zu wiederholen.



6.4.4 Harmonisch erregtes Federpendel

- 6.4.4.1 Starten Sie in MATLAB das Programm `chaos_gui`, s. Bild 6.4, das der Messdatenaufzeichnung dient. In einem ersten Schritt ist die Nulllage des Winkelgebers zu kalibrieren. Stellen dazu bei ausgeschalteter Anregung das Pendel in die vertikale Position (Messinggewicht über dem Drehpunkt der Scheibe) und drücken Sie den Button A. Anschließend sollte im Feld B die Anzeige Nulllage bestimmt erscheinen.
- 6.4.4.2 Um den seltsamen Attraktor zu erzeugen, stellen Sie eine Ist-Frequenz von 1.7Hz ein. Der Magnet der Wirbelstrombremse auf der Rückseite des Drehschwingers sollte einen Abstand von ungefähr 1mm von der Drehscheibe haben.

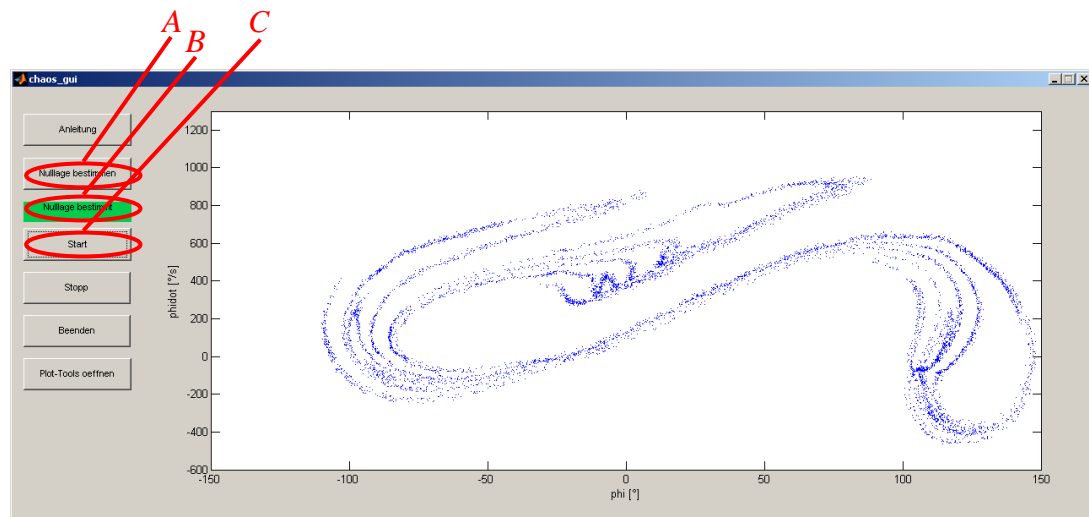


Bild 6.5 Erscheinungsbild von chaos_gui

Nachdem der Drehschwinger ein wenig eingeschwungen ist (wenige Sekunden), drücken Sie den Button C in Bild 6.4, um die Schwingungsdaten aufzuzeichnen. Während des Experiments können Sie $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$ sowie den Aufbau des Attraktors aus je einem Punkt je Erregerperiode im $\varphi, \dot{\varphi}$ -Schaubild beobachten. Da Letzteres ca. 45-60 min in Anspruch nimmt, sollten Sie parallel dazu eine neue Instanz des MATLAB-Programms starten und die folgenden Simulationen durchführen.

- 6.4.4.3 Erstellen Sie ein Simulink-Modell zur Simulation von (6.6), (6.7) mit den Anfangsbedingungen $\varphi(0)=\dot{\varphi}(0)=0$. Erstellen Sie einerseits ein $\varphi(t)$ -Diagramm, andererseits ein $\varphi, \dot{\varphi}$ -Diagramm, auch als Phasenporträt bezeichnet. Simulieren Sie das System über einen Zeitraum von 50s. Erkennen Sie in den Bildern Regelmäßigkeiten?
- 6.4.4.4 Welche Bewegungen ergeben sich für die Erregeramplituden $\lambda \in \{0.1, 0.2, 0.26\}$?
- 6.4.4.5 Ergänzen Sie das Simulink-Schaubild so, dass analog zum Experiment $(\varphi, \dot{\varphi})$ -Paare zu Zeitpunkten $t_k = k \cdot 2\pi / \Omega$, $k=0,1,2,3,\dots,N$, auf den MATLAB-Workspace ausgegeben werden (entfernen Sie aus Rechenzeitgründen die graphischen Darstellungen von $\varphi(t)$ und $\dot{\varphi}(t)$). Simulieren Sie das System über $N=10.000$ (oder $N=100.000$) Perioden und erstellen Sie mit den Ausgabedaten ebenfalls ein $\varphi, \dot{\varphi}$ -Diagramm aus Einzelpunkten (Verwenden Sie dazu `plot(x,y,'.', 'MarkerSize', 4)`). Welche Strukturen können Sie nun erkennen? Vergleichen Sie das Simulationsergebnis mit dem Experiment. (Hinweis: Ausdrucken über den Button „Plot-Tools öffnen“ -> Print Preview -> Landscape -> Fill Page).

6.5 Literatur

D. Bestle: Skript zur Technischen Mechanik 2 - Dynamik, Kapitel 13
Lehrbücher der Schulphysik und Schulmathematik