

## 5 Experimentelle Modalanalyse

### 5.1 Motivation

Schwingungen von linearen Systemen lassen sich als Überlagerung von Eigenschwingungen mit charakteristischen Frequenzen darstellen, die man auch als Schwingungsmoden bezeichnet (vgl. Versuch 4). Bei äußeren Störungen werden diese Eigenschwingungen unterschiedlich stark angeregt, wobei Erregerfrequenzen in der Nähe der Systemeigenfrequenzen zu sehr großen Schwingungsamplituden führen, die das System beschädigen oder zerstören können. Daher sollte man bei Turbomaschinen (Flugtriebwerk, stationäre Gasturbine, Verbrennungsmotor, Antriebsstrang, etc.) Drehzahlbereiche vermeiden, die im System oder in einzelnen Komponenten zu solchen Resonanzerscheinungen führen. Dazu muss man diese Eigenfrequenzen allerdings kennen. Die experimentelle Modalanalyse ist eine einfache Möglichkeit, Schwingungseigenfrequenzen und -formen sowie deren modale Dämpfung zerstörungsfrei zu ermitteln. Zudem kann man diese Information in der Parameteridentifikation nutzen, um Modelle an ein reales System anzupassen.

### 5.2 Versuchsvorbereitung

In Vorbereitung auf den Praktikumsversuch sind die folgenden theoretischen Überlegungen nachzuvollziehen und die Vorbereitungsfragen schriftlich auszuarbeiten. Ohne diese Grundkenntnisse können die Versuche nicht geeignet durchgeführt werden, weshalb Kandidaten bei ungenügender Vorbereitung vom Versuch ausgeschlossen werden.

#### 5.2.1 Modalanalyse

Als Modalanalyse bezeichnet man die (numerische oder experimentelle) Charakterisierung eines dynamischen Systems durch die modalen Parameter Eigenfrequenz und Dämpfung sowie zugehörige Eigenschwingungsformen. Bei der experimentellen Modalanalyse werden diese Schwingungen z.B. ähnlich wie bei einer Stimmgabel durch einen Stoß mit dem Impulshammer angeschlagen und durch mehrere Sensoren, meist Beschleunigungsaufnehmer, erfasst. Alle Signale werden anschließend gefiltert, ggf. verstärkt, und über einen A/D-Wandler (analog-digital) im Digitalrechner eingelesen, s. Bild 5.1. Dort wird mithilfe der Fourier-Transformation, auch als Fast-Fourier-Transformation (FFT) bekannt, ihr Frequenzinhalt analysiert. Durch Division der so gewonnenen Frequenzgänge von Schwingungsantwort und Erregerkraft erhält

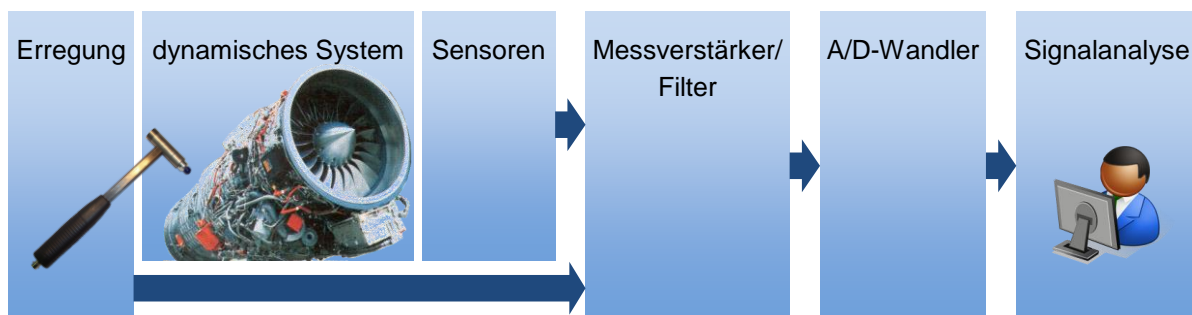


Bild 5.1 Experimentelle Modalanalyse

man komplexe Übertragungsfunktionen ähnlich den Resonanzkurven in Versuch 4. Für schwach gedämpfte System mit isolierten Eigenfrequenzen ergeben sich dann aus den Maxima der Amplitudenfrequenzgänge die Eigenfrequenzen, aus der Breite der Peaks die modalen Dämpfungsparameter. Durch Nachoptimierung kann man Kopplungen zwischen Schwingungsmoden berücksichtigen.

### 5.2.2 Komplexe Zahlen

Der reelle Zahlenraum  $\mathbb{R}$  ist nicht vollständig, denn die Wurzel aus negativen Zahlen ist darin z.B. nicht definiert. Durch Einführen der imaginären Einheit  $i = \sqrt{-1}$  kann man den Zahlenraum auf die komplexen Zahlen erweitern, die im Ingenieurbereich vor allem in der Elektrotechnik, Regelungstechnik und bei der Schwingungsanalyse benötigt werden. Eine komplexe Zahl  $z \in \mathbb{C}$  kann man sich in der Gaußschen Zahlenebene, Bild 5.2, als einen Vektor mit dem Realteil  $a \in \mathbb{R}$  als  $x$ -Koordinate ( $\hat{=} \text{Re}$ ) und dem Imaginärteil  $b \in \mathbb{R}$  als  $y$ -Koordinate ( $\hat{=} \text{Im}$ ) vorstellen. Mithilfe der imaginären Einheit schreibt man dafür kompakt

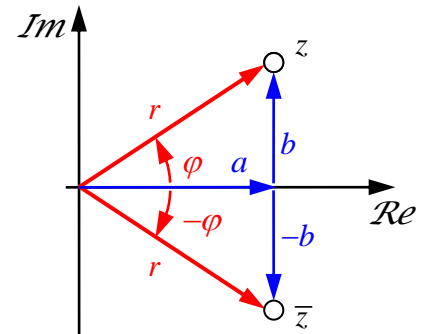


Bild 5.2 Gaußsche Zahlenebene

$$z = a + ib, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (5.1)$$

Zwei komplexe Zahlen  $z_1 = a_1 + ib_1$  und  $z_2 = a_2 + ib_2$  werden dann addiert, indem man wie bei Vektoren koordinatenweise Real- mit Realteil und Imaginär- mit Imaginärteil addiert:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \quad (5.2)$$

Im Unterschied zu Vektoren ist nun aber auch die Multiplikation durch Ausmultiplizieren der beiden Summen definiert:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 + i^2 b_1 b_2 \\ &\equiv (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1), \end{aligned} \quad (5.3)$$

wobei  $i^2 = -1$  benutzt wurde.

Da die Multiplikation in dieser Darstellung etwas umständlich ist, verwendet man alternativ zur kartesischen Darstellung (5.1) die Polardarstellung

$$z = r e^{i\varphi} \quad r, \varphi \in \mathbb{R}, \quad i = \sqrt{-1} \quad (5.4)$$

mit dem Betrag  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  als Abstand zum Koordinatenursprung und dem Winkel  $\varphi = \text{atan}(b/a)$  als Winkel zur  $x$ -Achse, vgl. Bild 5.2. Mit der Eulerformel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi \quad (5.5)$$

ergibt sich durch Einsetzen in (5.4) die Umrechnung in die Darstellung (5.1) als

$$a = r \cos \varphi, \quad b = r \sin \varphi, \quad (5.6)$$

die man in Bild 5.2 auch geometrisch nachvollziehen kann. In der Polardarstellung erhält man das Produkt zweier komplexer Zahlen  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  und  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$  nach den üblichen Regeln für Potenzen als

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (5.7)$$

Eine wichtige Größe ist die konjugiert komplexe Zahl zu (5.1) bzw. (5.4), bei welcher der Realteil übernommen, das Vorzeichen des Imaginärteils jedoch umgedreht wird, was sich in der Polardarstellung als negativer Winkel bemerkbar macht, vgl. Bild 5.2:

$$\bar{z} = a - ib = r e^{-i\varphi}. \quad (5.8)$$

Die Rechenregeln für die Konjugation sind

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}. \quad (5.9)$$

### 5.2.3 Harmonische Schwingung

Der einfachste Fall einer periodischen Schwingung ist die harmonische Schwingung bestehend aus einer Sinus-Funktion, Cosinus-Funktion oder deren Überlagerung:

$$x(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (5.10)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$  (Einheit rad/s) steht in Beziehung mit der Schwingungsfrequenz  $f$  (Schwingungen pro Sekunde, Einheit Hz) bzw. Schwingungsperiode  $T = 1/f$  (Zeit für eine Schwingung).

Für die Modalanalyse eignet sich jedoch die komplexe Darstellung

$$x(t) = c e^{i\omega t} + \bar{c} e^{-i\omega t}, \quad c \in \mathbb{C}, \quad (5.11)$$

als Summe der komplexen Zahl  $c e^{i\omega t}$  mit ihrer konjugiert komplexen Zahl  $\bar{c} e^{-i\omega t}$  besser, wodurch wieder eine reelle Größe  $x$  entsteht. Der Zusammenhang zu (5.10) ergibt sich durch Einsetzen der Eulerformel (5.5) in (5.11), Sortieren der Terme und Koeffizientenvergleich mit (5.10) als

$$a = c + \bar{c}, \quad b = i(c - \bar{c}) \quad \leftrightarrow \quad c = \frac{1}{2}(a - ib). \quad (5.12)$$

Jede allgemeine periodische oder nichtperiodische Funktion lässt sich als Überlagerung von harmonischen Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen darstellen, weshalb die harmonische Erregung für das grundlegende Verständnis ausreicht.

### 5.2.4 Übertragungsfunktion

Das einfachste lineare System mit harmonischer Erregung ist der Einmassenschwinger (Masse  $m$ , Steifigkeit  $c$ , Dämpfungskonstante  $d$ ), der durch eine harmonische Kraft (Amplitude  $F$ , Kreisfrequenz  $\omega$ ) zu Schwingungen angeregt wird, Bild 5.3. Aus dem Impulssatz

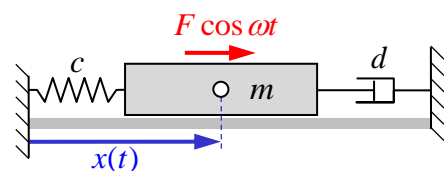


Bild 5.3 Einmassenschwinger

$$m\ddot{x} = -cx - d\dot{x} + F \cos \omega t \quad (5.13)$$

folgt die normierte Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 2f_0 \cos \omega t \equiv f_0 e^{i\omega t} + \bar{f}_0 e^{-i\omega t} \quad \text{mit} \quad \delta = \frac{d}{2m}, \quad \omega_0^2 = \frac{c}{m}, \quad f_0 = \frac{F}{2m} \equiv \bar{f}_0. \quad (5.14)$$

Durch Einsetzen des Ansatzes (5.11) in (5.14) ergibt sich mit der auch für komplexe Exponenten üblichen Differentiationsregel für e-Funktionen  $de^x/dx = e^x$  die Gleichung

$$(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2)ce^{i\omega t} + (-\omega^2 - 2i\delta\omega + \omega_0^2)\bar{c}e^{-i\omega t} = f_0e^{i\omega t} + \bar{f}_0e^{-i\omega t}. \quad (5.15)$$

Diese lässt sich allgemeingültig erfüllen, wenn die Koeffizienten von  $e^{i\omega t}$  bzw.  $e^{-i\omega t}$  auf linker und rechter Seite jeweils übereinstimmen. Durch Vergleich findet man

$$c = Hf_0 \text{ bzw. } \bar{c} = \overline{Hf_0} \equiv \bar{H} \bar{f}_0 \quad (5.16)$$

mit der komplexen Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\delta\omega}. \quad (5.17)$$

Ihr Betrag  $|H|$  wird als Amplitudenfrequenzgang bezeichnet und bestimmt nach Gleichung (5.16) die frequenzabhängige Amplitudenverstärkung  $|c| = |H(\omega)||f_0|$  der Schwingungen gegenüber der Anregung. Bild 5.4 zeigt einen typischen Verlauf mit Resonanzüberhöhung und einem starken Abklingen des Verstärkungsfaktors für hohe Frequenzen.

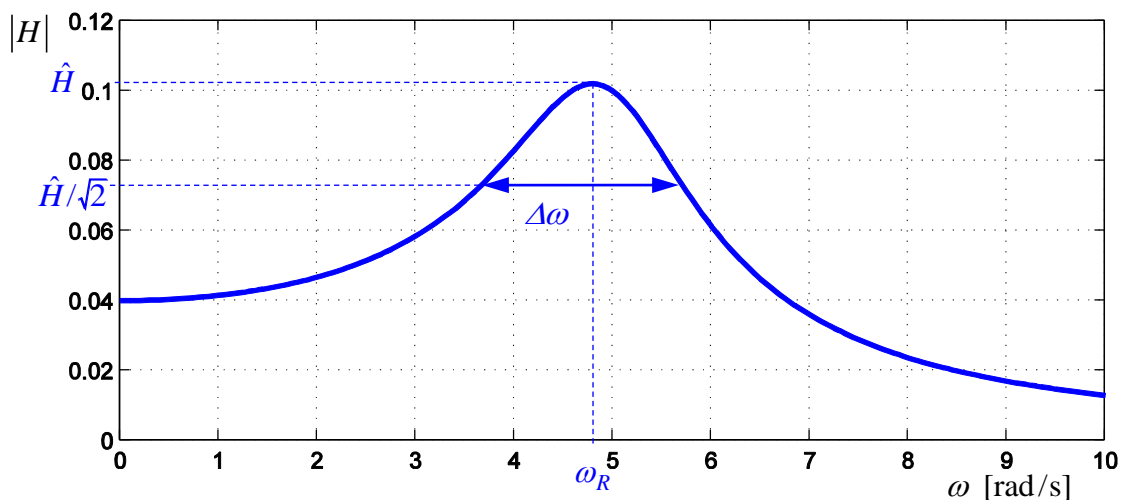


Bild 5.4 Amplitudenfrequenzgang eines Einmassenschwingers

Man kann zeigen, dass das Maximum  $\hat{H}$  von  $|H(\omega)|$  bei der Resonanzfrequenz

$$\omega = \omega_R := \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad (5.18)$$

auftritt und die Breite des Resonanzhügels auf der Höhe  $\hat{H}/\sqrt{2}$  sich ungefähr wie

$$\Delta\omega = 2\delta \quad (5.19)$$

verhält. Indem man diese beiden Größen graphisch bestimmt, vgl. Bild 5.4, kann man mithilfe von (5.18) und (5.19) schnell und einfach auf die Systemparameter  $\omega_0^2$  und  $\delta$  in Gleichung (5.14) schließen.

### 5.3 Vorbereitungsfragen

- Wie lauten die Zahlen  $z_1=2$ ,  $z_2=2+2i$ ,  $z_3=2i$  in Polardarstellung? Formulieren Sie die dazu konjugiert komplexen Zahlen  $\overline{z_1}$ ,  $\overline{z_2}$ ,  $\overline{z_3}$  jeweils in kartesischer und Polardarstellung.

Bilden Sie folgende Terme:

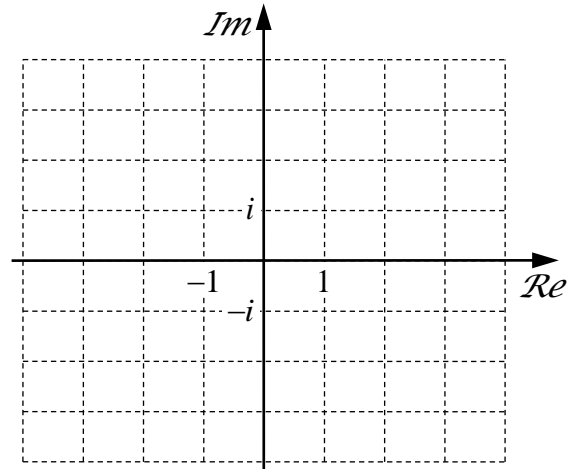
$$z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$z_2 + z_3, \overline{z_2 + z_3}, \overline{z_2} + \overline{z_3}$$

$$z_2 + z_2, \overline{z_2 + z_2}, \overline{z_2} + \overline{z_2}$$

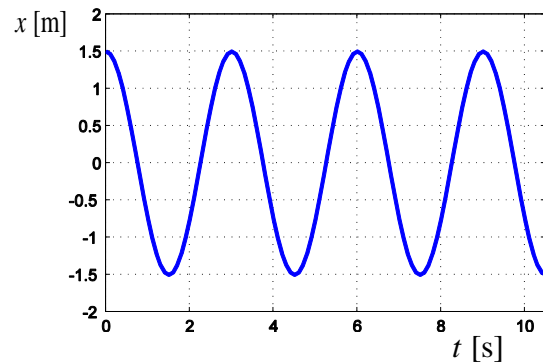
$$z_1 \cdot z_2, \overline{z_1 \cdot z_2}, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

$$z_2 \cdot z_3, \overline{z_2 \cdot z_3}, \overline{z_2} \cdot \overline{z_3}$$



Zeichnen Sie alle Größen in die Gaußsche Zahlenebene ein.

- Welche Periode  $T$ , Schwingungsfrequenz  $f$  und Kreisfrequenz  $\omega$  hat die dargestellte harmonische Schwingung? Wie groß sind in diesem Fall  $a$  und  $b$  in der mathematischen Beschreibung (5.10)? Welche komplexe Amplitude  $c$  ergibt sich daraus in der Darstellung (5.11)?



- Schätzen Sie mithilfe von (5.18) und (5.19) die Systemparameter  $\omega_0^2$  und  $\delta$  des Einmassenschwingers (5.13) bzw. (5.14) aus dem Amplitudenfrequenzgang in Bild 5.4. Welche Steifigkeit  $c$  und Dämpfung  $d$  hätte dieser Schwinger bei einer Masse von  $m=0.1\text{kg}$ ?

### 5.4 Versuchsdurchführung

#### 5.4.1 Komplexe Zahlen und Amplitudenfrequenzgang

- 5.4.1.1 Definieren Sie die Zahlen  $z_1=2$ ,  $z_2=2+2i$ ,  $z_3=2i$  in MATLAB, bilden Sie folgende Größen und Terme, und zeichnen Sie alle Größen in die Gaußsche Zahlenebene ein:

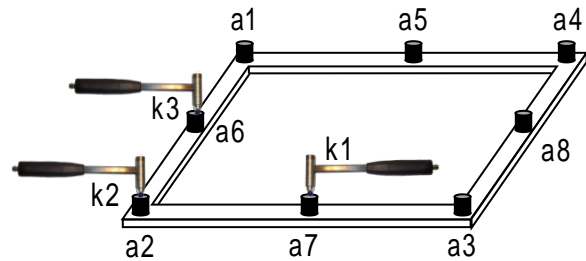
$$z_1 + z_2, \overline{z_1 + z_2}, \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad z_2 + z_3, \overline{z_2 + z_3}, \overline{z_2} + \overline{z_3}, \quad z_2 + z_2$$

$$z_1 \cdot z_2, \overline{z_1 \cdot z_2}, \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad z_2 \cdot z_3, \overline{z_2 \cdot z_3}, \overline{z_2} \cdot \overline{z_3}$$

- 5.4.1.2 Zeichnen Sie in MATLAB den Amplitudenfrequenzgang von (5.17) für  $\omega_0^2=25$ ,  $\delta=1$ . Was passiert, wenn man den Dämpfungsparameter auf  $\delta=0.5$  erniedrigt bzw. auf  $\delta=2$  erhöht? Wie verändert sich der Amplitudenfrequenzgang, wenn man den Steifigkeitsparameter auf  $\omega_0^2=9$  erniedrigt bzw. auf  $\omega_0^2=49$  erhöht?

### 5.4.2 Frequenzgänge eines Rahmens

Das im Experiment betrachtete dynamische System ist ein elastisch aufgehängter, rechteckiger Rahmen mit Eckmassen, der die Karosserie eines Cabrios repräsentiert. Der Rahmen kann sowohl Starrkörperschwingungen als auch elastische Schwingungen durchführen, wobei hier nur letztere interessieren und im Frequenzbereich 5...45Hz identifiziert werden sollen. Dazu ist der Rahmen mit 8 Beschleunigungsaufnehmern a1... a8 bestückt und soll nacheinander an den Knoten k1...k3 mit Hammerschlägen zu Schwingungen angeregt werden. Aus den Messungen der Schlagkraft und den resultierenden vertikalen Beschleunigungen sind zunächst jeweils die Übertragungsfunktionen zu ermitteln.



5.4.2.1 Starten Sie in MATLAB im Verzeichnis `..\Modalanalyse` das Programm `ma_gui`. Stellen Sie dort die Verstärkungsfaktoren entsprechend folgender Tabelle ein und drücken Sie anschließend den Knopf `download`, um diese auf den Messverstärker zu laden:

	Schlag k1		Schlag k2		Schlag k3	
	Eingang	Ausgang	Eingang	Ausgang	Eingang	Ausgang
F	32	1	32	1	32	1
a1	128	1	128	1	64	1
a2	64	1	32	1	64	1
a3	64	1	128	1	64	1
a4	128	1	128	1	64	1
a5	16	1	64	1	64	1
a6	64	1	32	1	8	1
a7	8	1	64	1	64	1
a8	64	1	64	1	32	1

5.4.2.2 Drücken Sie den Knopf `Messung starten`, wodurch der Messtrigger aktiviert wird. Führen Sie mit dem Impulshammer einen möglichst vertikalen Schlag mit mäßiger Geschwindigkeit auf den Knoten k1 der Rahmenstruktur aus. Vermeiden Sie dabei Doppelschläge. Anhand des Kraftsignals und der Aussteuerung der einzelnen Messkanäle können Sie dann entscheiden, ob Sie eine Messung akzeptieren oder verwerfen. Fahren Sie damit fort, bis Sie 5 Messungen akzeptiert haben, aus denen die Übertragungsfunktion gemittelt wird. Nach der letzten Messung beenden Sie die Messung mit `akzeptieren&anhalten` und speichern das Messergebnis unter `mess_lang`.

5.4.2.3 Wiederholen Sie Versuch 5.4.2.2, jedoch mit Schlag auf Knoten k2 und angepassten Verstärkungsfaktoren, und speichern Sie das Ergebnis unter mess\_ecke.

5.4.2.4 Wiederholen Sie Versuch 5.4.2.2, jedoch mit Schlag auf Knoten k3 und angepassten Verstärkungsfaktoren, und speichern Sie das Ergebnis unter mess\_kurz. Schließen Sie das Programm mit dem Button schließen.

### 5.4.3 Modalen Parameter des Rahmens

5.4.3.1 Bestimmen Sie zunächst graphisch modale Parameter aus den gemessenen Übertragungsfunktionen. Starten Sie dazu das MATLAB-Programm Modalanalyse\_1. Das dadurch erscheinende Bild zeigt zunächst Amplituden- (oben) und Phasenfrequenzgang (unten) der ersten Messung. Mit +/- (Schaltflächen A in Bild 5.5a) können Sie alle Messungen durchblättern.

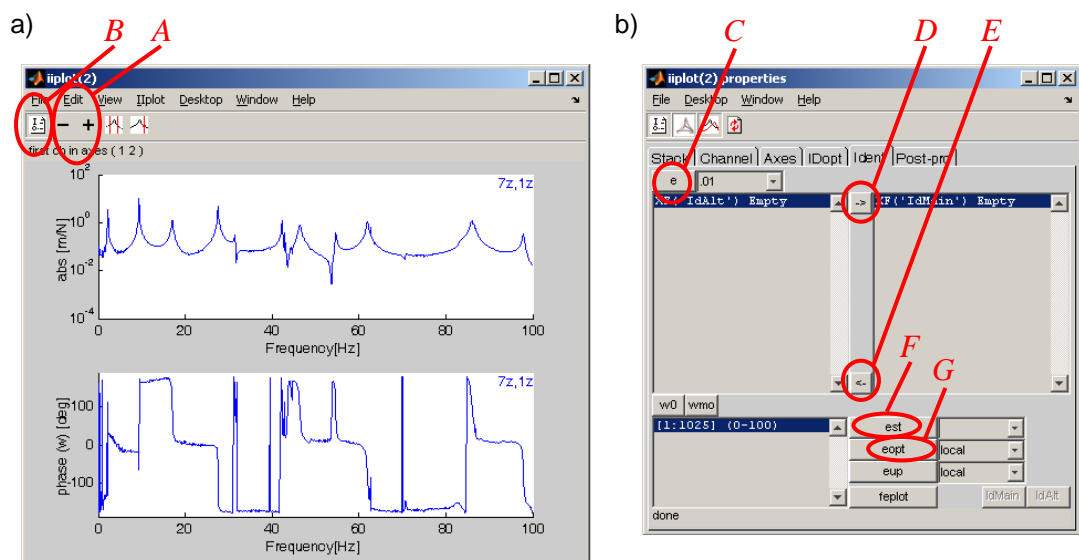


Bild 5.5 Erscheinungsbild von Modalanalyse\_1

Mit der Schaltfläche B entsteht ein neues Fenster, Bild 5.5b. Unter dem Reiter Ident werden die Eigenfrequenzen identifiziert. Dazu drückt man Schaltfläche C und kann dann in der graphischen Darstellung der Übertragungsfunktionen (Bild 5.5a) mit Maus/Cursor ausgeprägte Resonanzstellen anklicken. Zurück gegeben werden lokal passende Frequenz und Dämpfung, die man mit Schaltfläche D in den Speicher (rechte Spalte in Bild 5.5b) schieben kann. Diesen Vorgang setzt man fort, bis alle gewünschten Frequenzen notiert sind. Mit Schaltfläche E kann man einzelne Frequenzen auch wieder verwerfen.

5.4.3.2 Alle bisherigen Schätzungen beruhen jeweils auf den einzelnen, lokalen Resonanzüberhöhungen, vgl. Gleichungen (5.18), (5.19). Durch Kopplung der verschiedenen Eigenschwingungen werden diese allerdings verfälscht. Die Schätzungen lassen sich daher mit der Schaltfläche F durch gleichzeitige Berücksichtigung des gesamten Frequenzbereichs verbessern. Mit Schalt-

fläche G kann durch nichtlineare Optimierung des hinterlegten Residuenmodells eine weitere Verbesserung erreicht werden.

#### 5.4.4 Animation der Eigenschwingungsformen des Rahmens

5.4.4.1 Animieren Sie die Eigenschwingungsformen mithilfe der gewonnenen modalen Information. Lassen Sie dazu das Programm `Modalanalyse_1` geöffnet und starten Sie das MATLAB-Programm `Modalanalyse_3`. Mit +/- (Schaltflächen A in Bild 5.6) können Sie alle Eigenformen durchblättern, mit Schaltfläche B wird die Eigenform animiert. Interpretieren Sie die verschiedenen Eigenformen durch Begriffe wie Biegung und Torsion.

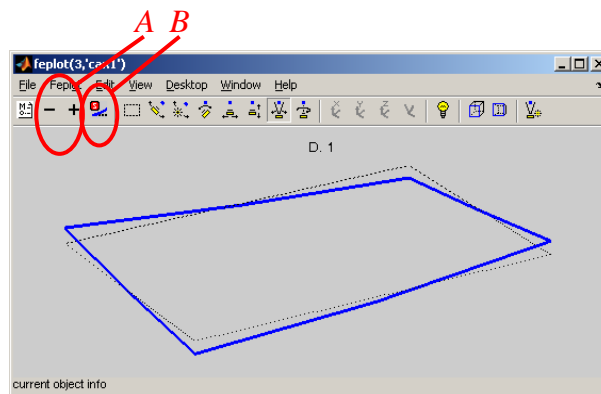


Bild 5.6 Erscheinungsbild von `Modalanalyse_2`

## 5.5 Literatur

D. Bestle: Skript zur Technischen Mechanik 2 - Dynamik, Kapitel 15  
 Lehrbücher der Schulphysik und Schulmathematik