4 Lineare Schwingungen

4.1 Motivation

Schwingungen sind mehr oder weniger regelmäßig auftretende, zeitliche Schwankungen bestimmter Größen. Man findet Schwingungen in der Natur beispielsweise als Luftschwingung beim Sprechen oder als Herzrhythmus des Menschen, im technischen Bereich als Kolbenbewegung eines Verbrennungsmotors, nach dem Anfahren oder Bremsen eines Zuges oder als unwuchterregte Bewegung der Wäschetrommel einer Waschmaschine. Im Rahmen dieses Versuchs sollen durch verschieden gekoppelte Wagen auf einer Luftkissenbahn freie und erzwungene Schwingungen linearer Systeme untersucht werden. Dabei wird die Schwingung im ersten Fall durch bestimmte Anfangsbedingungen induziert, im zweiten Fall mit Hilfe eines Fremderregers erzwungen. Aus Messungen sollen typische Schwingungscharakteristika abgeleitet werden. Zusätzlich sind Simulationen in Matlab/Simulink durchzuführen, um analytische und experimentelle Ergebnisse zu bestätigen.

4.2 Versuchsvorbereitung

In Vorbereitung auf den Praktikumsversuch sind die folgenden theoretischen Überlegungen nachzuvollziehen und die Vorbereitungsfragen handschriftlich auszuarbeiten. Ohne diese Grundkenntnisse können die Versuche nicht geeignet durchgeführt werden, weshalb Kandidaten bei ungenügender Vorbereitung vom Versuch ausgeschlossen werden.

4.2.1 Freie ungedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Ein horizontal geführter Körper (Masse m) ist mit zwei vorgespannten Federn (jeweils Vorspannkraft F_0, Federsteifigkeit c) an die Führungsschiene gekoppelt. Er soll aus der Ruhe mit der Anfangsauslenkung x_0 losgelassen werden, wobei die Auslenkung x als Verschiebung gegenüber der Gleichgewichtslage definiert ist.

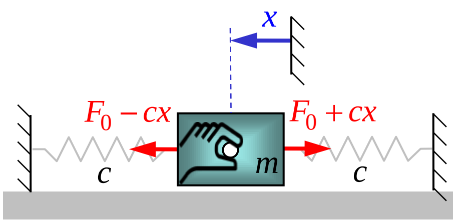


Bild 4.1 Freie ungedämpfte Schwingung

Vernachlässigt man die Reibung zwischen Führungsschiene und Körper, wirkt auf den Körper als resultierende Kraft die Federkraft $2cx$ entgegen der Verschiebung. Damit ergibt sich aus dem Impulssatz (2. Newtonsches Gesetz)

$$m\ddot{x} = -2cx \tag{4.1}$$

oder nach Umformung die lineare Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad mit \qquad \omega_0^2 = \frac{2c}{m}. \tag{4.2}$$

Die Lösung dieser homogenen Differentialgleichung ist die freie ungedämpfte Schwingung

$$x(t) = \hat{x}\cos\omega_0 t \tag{4.3}$$

mit der Kreisfrequenz ω_0 und Amplitude $\hat{x}$.

4.2.2 Erzwungene Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Schwingungen in Maschinen sind meist nicht frei, sondern werden üblicherweise von außen erzwungen. Im Experiment geschieht dies durch die Fußpunkterregung $x_E(t) = a\cos\Omega t$ entsprechend Bild 4.2. Damit erweitert sich der Impulssatz (4.1) auf

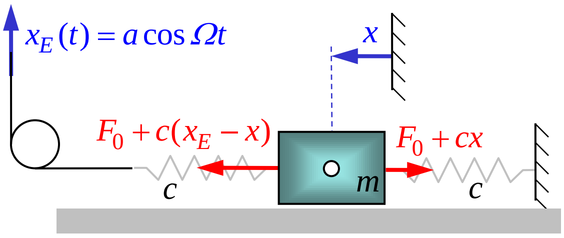


Bild 4.2 Erzwungene Schwingung

$$m\ddot{x} = -2cx + cx_E \qquad (4.4)$$

und führt nach Umformung auf die Schwingungsdifferentialgleichung

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos\Omega t \qquad mit \qquad \omega_0^2 = \frac{2c}{m},\; f_0 = \frac{ca}{m}. \qquad (4.5)$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung ergibt sich aus der Überlagerung der homogenen Lösung (4.3) und der stationären Lösung

$$x(t) = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\cos\Omega t\,. \qquad (4.6)$$

4.2.3 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

Koppelt man mehrere Wagen, so erhält man ein Schwingungssystem mit mehreren Freiheitsgraden. Im Falle zweier Wagen, Bild 4.3, ergibt sich

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{2c}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 &= 0, \\ \ddot{x}_2 - \frac{c}{m}x_1 + \frac{2c}{m}x_2 &= 0. \end{aligned} \qquad (4.7)$$

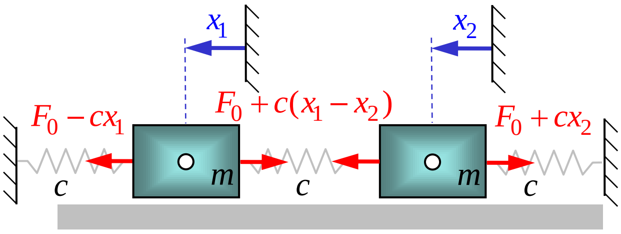


Bild 4.3 Schwingung mit 2 Freiheitsgraden

Wie beim Einfreiheitsgradschwinger gibt es auch hier charakteristische Eigenfrequenzen, deren Anzahl dem Freiheitsgrad des Systems entspricht. Bei diesen schwingen alle Körper synchron mit charakteristischen Amplitudenverhältnissen, die man als Eigenschwingungsformen bezeichnet.

Bei zwei gekoppelten Wagen findet man die beiden Eigenschwingungen

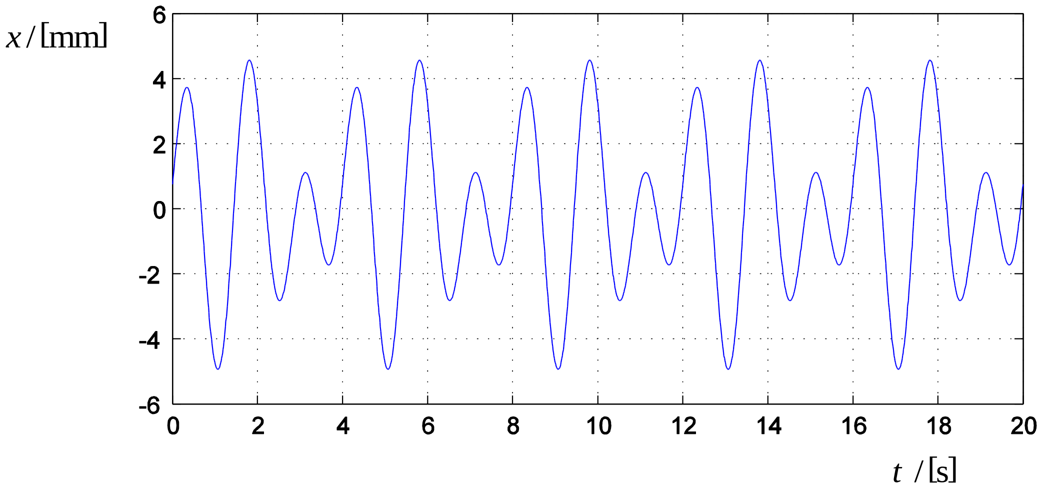
$$x_1(t) = x_2(t) = \hat{x}\cos\omega_1 t, \qquad \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{m}} \qquad (4.8)$$

und

$$x_1(t) = -x_2(t) = \hat{x}\cos\omega_2 t, \qquad \omega_2 = \sqrt{3\frac{c}{m}}\,. \qquad (4.9)$$

4.3 Vorbereitungsfragen

- Woran erkennt man, dass eine Schwingungsgleichung linear ist?
- Zeigen Sie durch zweimaliges Ableiten und Einsetzen, dass die Zeitfunktion (4.3) die Differentialgleichung (4.2) erfüllt.
- Berechnen Sie für den 1-Freiheitsgrad-Schwinger (4.2) mit $m = 0.1\,\text{kg}$ und $c = 20\,\text{N/m}$ die Kreisfrequenz ω_0, Schwingungsperiode T und Schwingungsfrequenz f.
- Bestimmen Sie in folgender Abbildung die Periodendauer T.



- Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass die Schwingung (4.6) die Gleichung (4.5) erfüllt.
- Was passiert, wenn sich im Falle der erzwungenen Schwingung (4.6) die Erregerfrequenz Ω der Eigenfrequenz ω_0 nähert?

  Zeigen Sie, dass sich für den Resonanzfall $\Omega = \omega_0$ die Schwingung aus der Ruhelage nach dem Gesetz

$$x(t) = \frac{f_0}{2\omega_0} t \sin \omega_0 t \tag{4.10}$$

  entwickelt.
- Formulieren Sie den Impulssatz für das System in Bild 4.3 und zeigen Sie den Übergang auf die Schwingungsgleichungen (4.7).

  Zeigen Sie durch Ableiten und Einsetzen, dass die Schwingungen (4.8) und (4.9) jeweils die Schwingungsgleichungen (4.7) erfüllen.

4.4 Versuchsdurchführung

Warnung vor Verletzungsrisiken und Beschädigungen

- Bei Lasermessung nicht in den Laserstrahl blicken
- Gewährleisten Sie durch eine mechanische Stoppvorrichtung, dass der Messlaser durch Schwingungen nicht getroffen werden kann

4.4.1 Freie ungedämpfte Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Im Experiment soll zunächst die freie ungedämpfte Schwingung anhand eines einzelnen Wagens untersucht werden. Die Lagemessung erfolgt mit Hilfe eines Lasers auf der Basis des Triangulationsprinzips (Messbereich 30-130mm).

a) Bauen Sie den Versuch entsprechend Bild 4.4 auf. Der Messlaser darf nur durch den Versuchsassistenten eingeschaltet werden.

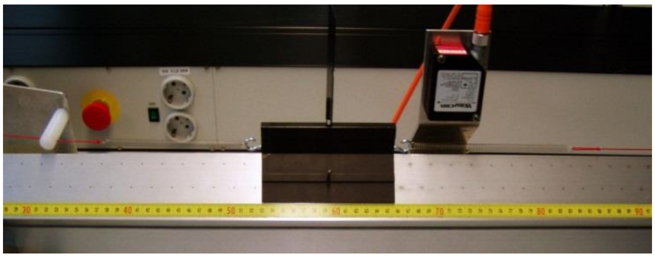


Bild 4.4 Versuchsaufbau der ungedämpften 1-Freiheitsgrad-Schwingung

Lenken Sie den Wagen händisch aus der Gleichgewichtslage mit verschiedenen Anfangsauslenkungen x_0 aus, geben Sie ihn frei und messen Sie die $x(t)$-Verläufe. Ermitteln Sie daraus jeweils Periodendauer T, Schwingungsfrequenz f und Eigenkreisfrequenz ω_0. Wie hängt die Periodendauer von der Schwingungsamplitude ab?

	T in[s]	f in[Hz]	ω_0 in[s^{-1}]
$x_0 = 1\,\mathrm{cm}$			
$x_0 = 2\,\mathrm{cm}$			
$x_0 = 3\,\mathrm{cm}$			

b) Bestimmen Sie die Masse m des Wagens durch Wiegen:

$$m = \_\_\_\_\_\_\_$$

Welche Steifigkeit c ergibt sich damit aus Gleichung (4.2)?

$$c = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_}_{Formel} = \underbrace{\_\_\_\_\_\_\_}_{Wert}\ \mathrm{N/m}$$

c) Erstellen Sie ein Matlab/Simulink Modell entsprechend Gleichung (4.2) und vergleichen Sie den simulierten Zeitverlauf $x(t)$ mit der analytischen Funktion (4.3) sowie dem gemessenen Zeitverlauf aus Versuch 4.4.1a. Welche Zusammenhänge und Unterschiede stellen Sie fest?

4.4.2 Erzwungene Schwingung mit einem Freiheitsgrad

Im Experiment soll nun die erzwungene Schwingung untersucht werden.

a) Regen Sie die Schwingungen mit verschiedenen Erregerfrequenzen an und beobachten Sie die Schwingungsantworten. Was passiert für sehr kleine und sehr große Erregerfrequenzen? Bestimmen Sie die Resonanzfrequenz, bei der die Amplitude maximal wird:

$$\Omega = \_\_\_\_\_ .$$

Vergleichen Sie diese mit der Eigenfrequenz ω_0 aus Versuch 4.4.1a.

b) Schalten Sie die Erregung bei voreingestellter Resonanzfrequenz plötzlich zu, während der Wagen noch steht. Welches Phänomen beobachten Sie in den ersten Sekunden der Messung? Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der analytischen Lösung (4.10).

c) Erweitern Sie Ihr Matlab/Simulink Modell um die Erregerfunktion nach Gleichung (4.5) und simulieren Sie den Zeitverlauf $x(t)$ für den Resonanzfall 4.4.2b.

4.4.3 Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden

In einem weiteren Experiment sollen Schwingungen mit mehreren Freiheitsgraden untersucht werden.

a) Bauen Sie den Versuch entsprechend Bild 4.5 mit zwei ungedämpften Wagen auf und bestimmen Sie die Resonanzfrequenzen analog zu Versuch 4.4.2a. Schätzen Sie die Auslenkungsamplituden durch Ablesen des Maßstabs an der Luftkissenbahn. Welche Schwingungseigenformen des Systems beobachten Sie?

1. Eigenschwingung: $\Omega = \_\_\_\_\_ , \quad \dfrac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2} = \_\_\_\_\_$

2. Eigenschwingung: $\Omega = \_\_\_\_\_ , \quad \dfrac{\hat{x}_1}{\hat{x}_2} = \_\_\_\_\_$

In welchem Verhältnis stehen die beiden Resonanzfrequenzen zueinander? Vergleichen Sie diese mit dem der analytischen Lösungen (4.8) und (4.9).

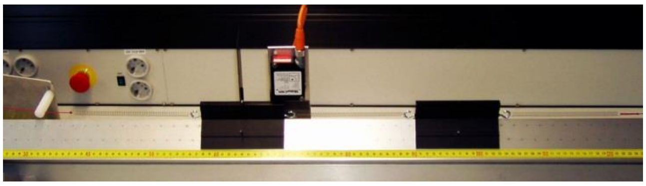


Bild 4.5 Versuchsaufbau der erzwungenen 2-Freiheitsgrad-Schwingung

b) Suchen Sie Anfangsbedingungen, so dass auch das freie System in den beobachteten Eigenformen schwingt.

c) Simulieren Sie die Gleichungen (4.7) mit diesen Anfangsbedingungen.

4.5 Literatur

D. Bestle: Skript zur Technischen Mechanik 2 - Dynamik, Kapitel 13 - 15

Wikipedia

Lehrbücher der Schulphysik