2 Kräfte und Momente

2.1 Motivation

Kräfte und Momente spielen in der Technischen Mechanik eine zentrale Rolle. So ist ein Körper nur dann im Gleichgewicht, wenn die Summe aller an ihm angreifenden Kräfte und Momente verschwindet. Verbleibt eine resultierende Kraft, wird der Körper translatorisch beschleunigt, ein resultierendes Moment versetzt den Körper in Rotation. Man unterscheidet eingeprägte Kräfte und Momente, die sich aus einem physikalischen Kraftgesetz ergeben, und Reaktionskräfte und -momente, die in Bindungen und Lagern entstehen und auf die anderen Kräfte und Bewegungen reagieren, um die Bindungen aufrecht zu erhalten. Im Allgemeinen sind die eingeprägten Kräfte und Momente vorgegeben, während sich Reaktionen in der Statik aus dem Gleichgewicht und in der Dynamik aus Impuls- und Drallsatz ergeben. Im Rahmen des Versuchs soll die unterschiedliche Wirkung von Kräften und Momenten untersucht und deren Messung über Deformationseffekte demonstriert werden.

2.2 Versuchsvorbereitung

In Vorbereitung auf den Praktikumsversuch sind die folgenden theoretischen Überlegungen nachzuvollziehen und die Vorbereitungsfragen handschriftlich auszuarbeiten. Ohne diese Grundkenntnisse können die Versuche nicht geeignet durchgeführt werden, weshalb Kandidaten bei ungenügender Vorbereitung vom Versuch ausgeschlossen werden.

2.2.1 Kräfte

Isaac Newton hat erkannt, dass die Ursache für Änderungen des Bewegungszustandes eines Körpers Wechselwirkungen mit anderen Körpern sein müssen, die durch das Konzept der Kräfte beschrieben können. Da Geschwindigkeitsänderungen vektorielle Größen sind, müssen Kräfte ebenfalls durch Vektoren $\vec{F}$ beschrieben werden, d.h. sie werden erst durch Angabe von Länge (Betrag $F = \|\vec{F}\|$) und Richtung (Winkel α) eindeutig festgelegt, Bild 2.1.

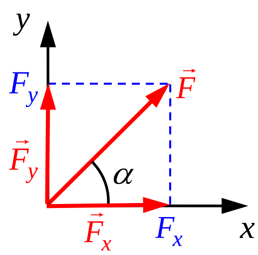


Bild 2.1: Kraftvektor

Kräfte beschreibt man am besten in einem kartesischen Koordinatensystem, indem man den Kraftvektor $\vec{F}$ in Komponenten $\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y$ entlang den Koordinatenachsen zerlegt und deren Längen $F_x = \|\vec{F}_x\|, F_y = \|\vec{F}_y\|$ in einer Spaltenmatrix

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F\cos\alpha \\ F\sin\alpha \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

der Koordinaten zusammenfasst.

Zur Messung von Kräften kann man die durch sie bewirkte Verformung elastischer Körper nutzen. Beispielsweise ist bei einer Federwaage, Bild 2.2a, die Verlängerung x einer Spiralfeder proportional zur angreifenden Kraft F, d.h.

$$F = c \cdot x \ , \tag{2.2}$$

wodurch man die Bestimmung der Kraft auf eine Längenmessung zurückführen kann. Die Proportionalitätskonstante ist die Federkonstante c, die einmalig in einem Kalibrierprozess zu bestimmen ist (Eichung der Federwaage).

a) Federwaage b) Biegebalken c) Torsionsstab

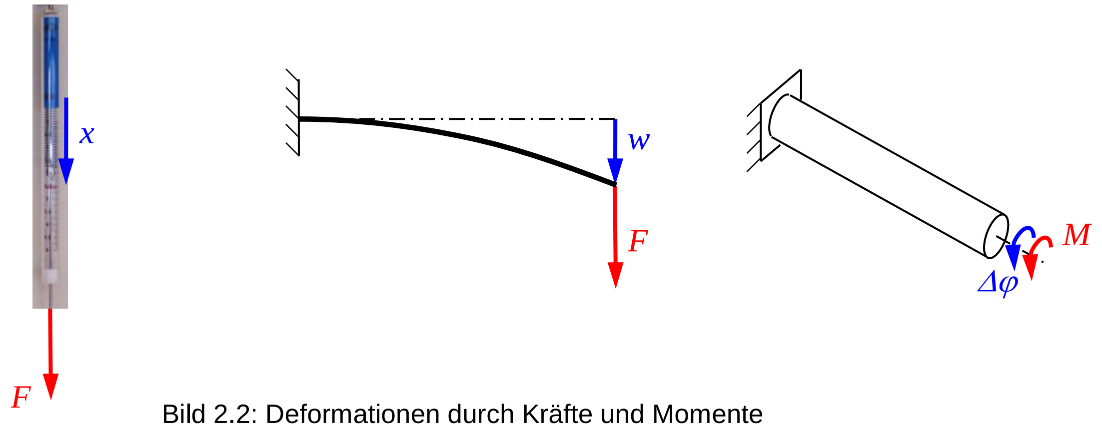


Bild 2.2: Deformationen durch Kräfte und Momente

Alternativ könnte man auch einen einseitig fest eingespannten Biegebalken der Länge L mit Durchmesser d nehmen, Bild 2.2b, bei dem kleine Auslenkungen w ebenfalls proportional zur angreifenden Kraft F sind:

$$w = \frac{FL^3}{3EI_y} \quad mit \quad I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \tag{2.3}$$

2.2.2 Kräftepaar und Moment

An einem ausgedehnten Körper wie der Balkenwaage in Bild 2.3 kann der Angriffspunkt P der Kraft F einen Abstand r vom Lagerpunkt O haben. In diesem Fall entsteht neben der Kraftwirkung zusätzlich eine Momentenwirkung

$$M_O = r \cdot F \tag{2.4}$$

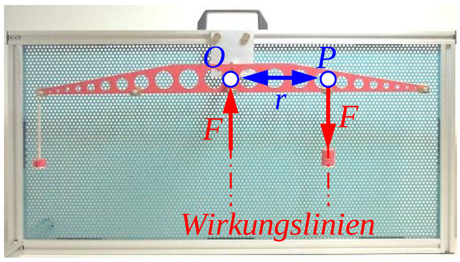


Bild 2.3: Balkenwaage

bezüglich O. Tatsächlich aber ist die Momentenwirkung das Resultat eines Kräftepaars bestehend aus der angreifenden Kraft F und einem entgegengesetzt gleichgroßen Anteil der Stützkraft im Lager der Balkenwaage, die dieser das Gleichgewicht hält. Generell nennt man ein Paar von zwei entgegengesetzt gleichgroßen parallelen Kräften ein Kräftepaar, das auf einen Körper lediglich eine Momentenwirkung (2.4) proportional zum Abstand der Wirkungslinien und dem Betrag der Kraft hat.

Momente versetzen Körper in Rotation oder führen zur Torsion von schlanken Stäben, Bild 2.2c. Greift z.B. ein Moment M an einem Stab mit Länge L und Durchmesser d an, verdrillt er diesen um den Winkel

$$\Delta\varphi = \frac{ML}{GI_p} \quad mit \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \tag{2.5}$$

2.2.3 Gleichgewicht eines Kräftesystems

Greifen an einem Körper mehrere Kräfte $\vec{F}_i$ an, kann man diese durch Aufsummieren zu einer resultierenden Kraft

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_i \tag{2.6}$$

zusammenfassen. Ebenso kann man ihre Momentenwirkungen (2.4) zu einer resultierenden Momentenwirkung aufsummieren. Ein Körper ist genau dann im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft und das resultierende Moment aller an ihm angreifenden Kräfte und Momente verschwinden.

2.2.4 Beschleunigte Bewegung

Verbleibt eine resultierende Kraft $\vec{R}$, beschleunigt diese einen Körper der Masse m mit einer Beschleunigung $\vec{a}$ in Kraftrichtung, die sich aus dem 2. Newtonschen Axiom ergibt:

$$m\vec{a} = \vec{R}\,. \tag{2.7}$$

Beim Maxwellschen Rad bzw. einem Jojo, Bild 2.4, führt die Momentenwirkung des Kräftepaars bestehend aus der Gewichtskraft mg und der Seilkraft S zu einem beschleunigten Abrollen, wobei die Beschleunigung des Schwerpunkts dem Impulssatz (2.7) genügt, d.h.

$$m\ddot{y} = mg - S\,. \tag{2.8}$$

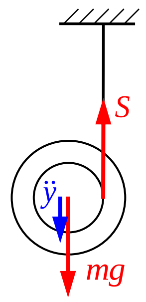
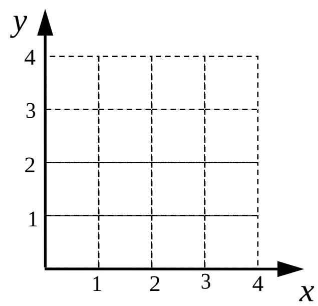


Bild 2.4: Maxwellsches Rad

2.3 Vorbereitungsfragen

- Stellen Sie die Kräfte des Experiments 2.4.1.1 im Koordinatensystem dar und addieren Sie diese zeichnerisch. Vergleichen Sie die Koordinaten des Summenvektors $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ mit dem rechnerischen Ergebnis



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}.$$

Welche Länge hat der Vektor?

$$F = \underline{\qquad\qquad\qquad}\,.$$

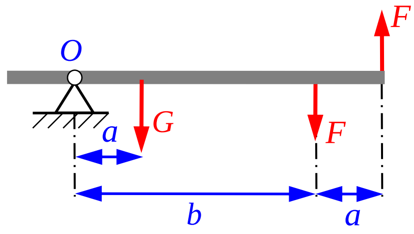
- Formulieren Sie für das Kräftesystem in Experiment 2.4.1.2 die Gleichgewichtsbedingungen bezüglich O:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad M_O = \underline{\qquad\qquad} = 0\,.$$

Welche Kraftverhältnisse findet man daraus für gegebene Winkel α und β?

$$\frac{F_2}{F_1} = \underline{\qquad\qquad\qquad}, \quad \frac{F_3}{F_1} = \underline{\qquad\qquad\qquad}\,.$$

- Welche Momentenwirkung hat das dargestellte Kräftesystem bezüglich des Lagerpunkts O der Balkenwaage?



$$M_O = \underline{\hspace{6cm}}$$

Wie groß muss die Kraft G sein, damit die Balkenwaage im Gleichgewicht ist?

$$G = \underline{\hspace{2.5cm}}$$

Welchen Einfluss hat der Abstand b des Kräftepaars vom Lagerpunkt? Welche Schlussfolgerung ziehen Sie daraus für die Momentenwirkung eines Kräftepaars $\pm\vec{F}$?

$$\underline{\hspace{14cm}}$$

- Welche Steifigkeit hat ein Biegebalken der Länge $L = 1\,\mathrm{m}$ mit Durchmesser $d = 5\,\mathrm{mm}$ aus Stahl (Elastizitätsmodul $E = 210\,000\ \mathrm{N/mm^2}$) nach Bild 2.2b bzw. Gleichung (2.3)?

$$c = \frac{F}{w} = \underbrace{\underline{\hspace{2.5cm}}}_{Formel} = \underbrace{\underline{\hspace{1.5cm}}}_{Wert}\ \mathrm{N/m}\,.$$

- Welche Torsionssteifigkeit hat ein Stab der Länge $L = 1\,\mathrm{m}$ mit Durchmesser $d = 5\,\mathrm{mm}$ aus Stahl (Schubmodul $G = 72\,000\ \mathrm{N/mm^2}$) nach Bild 2.2c bzw. Gleichung (2.5)?

$$c = \frac{M}{\Delta\varphi} = \underbrace{\underline{\hspace{2.5cm}}}_{Formel} = \underbrace{\underline{\hspace{1.5cm}}}_{Wert}\ \mathrm{Nm/rad}\,.$$

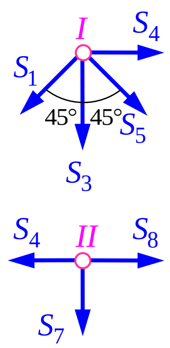
- Ein System ist im Gleichgewicht, wenn jeder Teil im Gleichgewicht ist. Für das Fachwerk in Experiment 2.4.3.1 bedeutet dies, dass jeweils alle an einem Knoten angreifenden Stabkräfte S_i im Gleichgewicht sein müssen. Formulieren Sie für jeden Knoten das Kräftegleichgewicht in horizontale und vertikale Richtung.

$$\textit{Knoten I}: \quad \underline{\hspace{8cm}} = 0$$

$$\underline{\hspace{8cm}} = 0$$

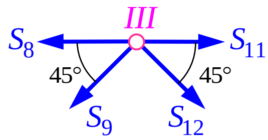
$$\textit{Knoten II}: \quad \underline{\hspace{8cm}} = 0$$

$$\underline{\hspace{8cm}} = 0$$



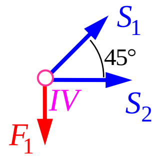
Knoten III : ________________________ $= 0$

________________________ $= 0$



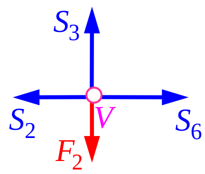
Knoten IV : ________________________ $= 0$

________________________ $= 0$



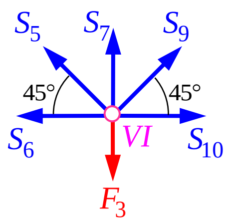
Knoten V : ________________________ $= 0$

________________________ $= 0$



Knoten VI : ________________________ $= 0$

________________________ $= 0$



2.4 Versuchsdurchführung

2.4.1 Kräfte und Momente

2.4.1.1 Addition von Kräften

Definieren Sie die Kraftvektoren

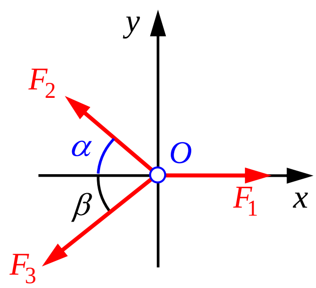
$$\mathbf{F}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{N}, \quad \mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \mathrm{N}$$

in MATLAB und addieren Sie diese.

2.4.1.2 Kräftegleichgewicht

Formulieren Sie das Kräftegleichgewicht des dargestellten Kräftesystems als Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad & \\ & \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underset{\mathbf{x}}{\begin{bmatrix} F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}} = \underset{\mathbf{b}}{\begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \end{bmatrix}}.$$



Definieren Sie Koeffizientenmatrix und rechte Seite in MATLAB für $F_1 = 1\,\mathrm{N}$, $\alpha = 46.6°$, $\beta = 104.5°$ und berechnen Sie die beiden übrigen Kräfte:

$F_2 =$ _____ , $F_3 =$ _____ .

Bestätigen Sie Ihr Ergebnis durch eine maßstäbliche Zeichnung des geschlossenen Kräftepolygons.

Stellen Sie das Experiment am Kräftetisch nach,

wobei sich die Kräfte als Gewichtskräfte $F_i = m_i g$ aus angehängten Massen m_i ergeben. Verwenden Sie $m_1 = 100\,g$ und finden Sie die beiden restlichen Massen. Zur Überprüfung des Gleichgewichts können Sie den Ring leicht anheben und fallen lassen. Fällt der Ring zurück ins Zentrum, ist der Gleichgewichtszustand erreicht.

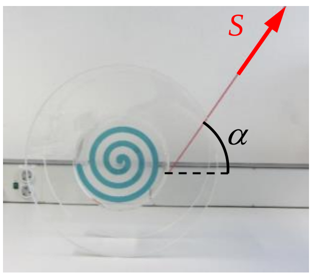
$m_2 =$ _____ , $m_3 =$ _____ .

Suchen Sie am Kräftetisch passende Winkel für das Kräftegleichgewicht mit $m_1 = 100\,g$, $m_2 = 300\,g$, $m_3 = 220\,g$:

$\alpha =$ _____ , $\beta =$ _____ .

Wie kann man dieses Ergebnis analytisch finden? (Hinweis: Betrachten Sie das geschlossene Kräftepolygon.

2.4.1.3 Momentenwirkung



Was passiert mit der Rolle, wenn man am Seil zieht?

für große Winkel α : __________________

für kleine Winkel α : __________________

Wie groß ist der Grenzwinkel und was passiert dann? Erklären Sie dieses Phänomen, indem Sie durch Beobachtung den aktuellen Drehpunkt der Rolle (Momentanpol) suchen und die Momentenwirkung der Seilkraft S bezüglich dieses Punktes diskutieren.

Grenzwinkel $\alpha =$ ______

Beobachtung : __________________

2.4.2 Steifigkeit

2.4.2.1 Federwaage

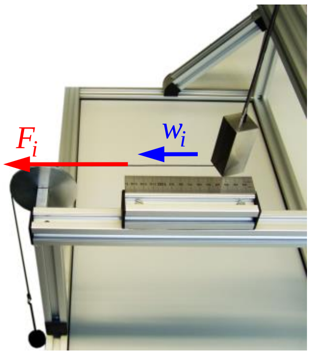
Hängen Sie an die 5N-Federwaage in Bild 2.2a verschiedene Gewichte, lesen Sie den angezeigten Wert ab und berechnen Sie den relativen Fehler.

Masse [g]	Gewichtskraft [N]	angezeigte Kraft [N]	rel. Fehler [%]
0		ggf. Nulllage justieren	
50			
100			
200			
400			

Welche nominelle Steifigkeit hat die eingebaute Feder?

$$c = \_\_\_\_\_ \text{ N/m} .$$

2.4.2.2 Biegebalken



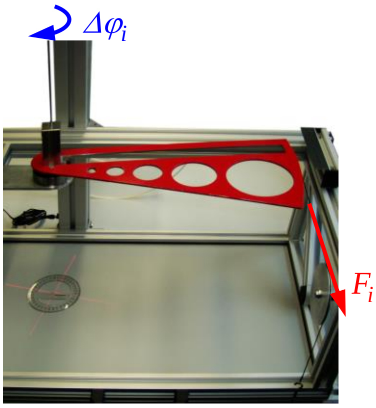
Hängen Sie an den Biegebalken verschiedene Gewichte F_i, lesen Sie die zugehörige Auslenkung w_i ab und zeichnen Sie mit MATLAB ein $w_i - F_i$-Diagramm. Welche Steifigkeit ergibt sich?

$$c = \frac{F}{w} = \_\_\_\_\_ \text{ N/m} .$$

Vergleichen Sie diesen Wert mit einem rechnerischen Ergebnis nach Gleichung (2.3):

$$d = \_\_\_\_\_ , \; L = \_\_\_\_\_ \rightarrow c = \_\_\_\_\_ \text{ N/m} .$$

2.4.2.3 Torsionsstab



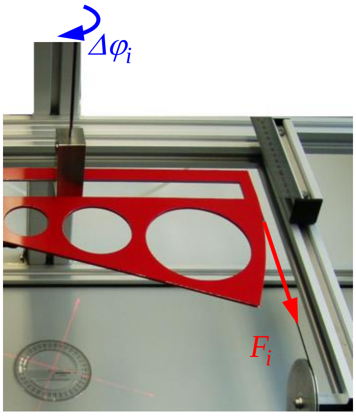
Belasten Sie den Torsionsstab durch Anhängen von verschiedenen Gewichten, Berechnen Sie das zugehörige Moment M_i, lesen Sie die zugehörige Verdrehung $\Delta\varphi_i$ ab und zeichnen Sie mit MATLAB ein $\Delta\varphi_i - M_i$-Diagramm. Welche Torsionssteifigkeit ergibt sich?

$$c = \frac{M}{\Delta\varphi} = \_\_\_\_\_ \text{ Nm/rad} .$$

Vergleichen Sie diesen Wert mit einem rechnerischen Ergebnis nach Gleichung (2.5):

$$d = \underline{\qquad\qquad}\,, \quad L = \underline{\qquad\qquad} \quad \rightarrow c = \underline{\qquad\qquad}\ \mathrm{N/m}\,.$$

2.4.2.4 Invarianz der Momentenwirkung

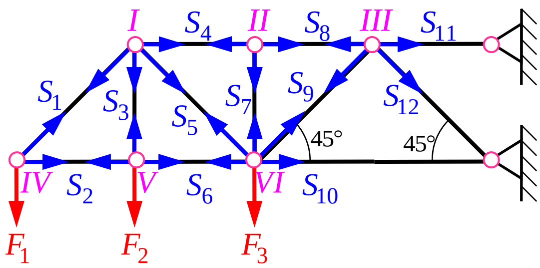


Hängen Sie ein geeignetes Gewicht an, so dass die Schiene des Hebels parallel zum Schlitten ist. Verschieben Sie dann den Schlitten, so dass das Torsionsmoment des Stabes an verschiedenen Stellen des Hebels angreift. Beobachten Sie jeweils den entstehenden Verdrehwinkel. Wie hängt dieser vom Angriffspunkt des Moments ab?

____

2.4.3 Fachwerk

2.4.3.1 Rechnerische Lösung



Fassen Sie die Kräftegleichgewichte der Fachwerkknoten in einem Gleichungssystem für die unbekannten Stabkräfte S_i für gegebene Lasten F_1, F_2 und F_3 zusammen.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Definieren Sie Koeffizientenmatrix und rechte Seite in MATLAB für folgende 3 Lastfälle und berechnen Sie jeweils die Stabkräfte S_3, S_5 und S_7:

1) $F_1 = 30.6\,\mathrm{N}, F_2 = 0, F_3 = 0 \;\rightarrow S_3 =$ _____ , $S_5 =$ _____ , $S_7 =$ _____

2) $F_1 = 0, F_2 = 30.6\,\mathrm{N}, F_3 = 0 \;\rightarrow S_3 =$ _____ , $S_5 =$ _____ , $S_7 =$ _____

3) $F_1 = 0, F_2 = 0, F_3 = 30.6\,\mathrm{N} \;\rightarrow S_3 =$ _____ , $S_5 =$ _____ , $S_7 =$ _____

2.4.3.2 Experiment

Messen Sie Stabkräfte durch Aufruf des MATLAB-Progamms `Kraefte.m`, indem Sie das Gewicht jeweils an die entsprechende Stelle hängen:

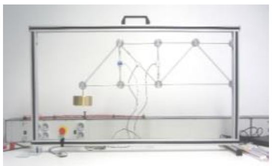
1) $S_3 =$ _____ , $S_5 =$ _____ , $S_7 =$ _____

2) $S_3 =$ _____ , $S_5 =$ _____ , $S_7 =$ _____

3) $S_3 =$ _____ , $S_5 =$ _____ , $S_7 =$ _____

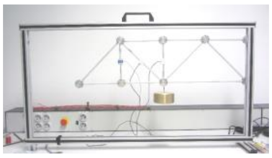
Vergleichen Sie die gemessenen mit den rechnerischen Ergebnissen.

1)



2)

3)



2.4.4 Maxwellsches Rad

Balancieren Sie das Maxwellsche Rad im hängenden Zustand so aus, dass der Hebel der Balkenwaage im Gleichgewicht ist. Rollen Sie dann das Rad auf und lassen Sie es stoßfrei so los, dass die Balkenwaage horizontal und die Schnur senkrecht ist. Welchen Effekt beobachten Sie beim

- Abrollen: *Seilkraft wird* ☐ *kleiner* ☐ *größer* ☐ *bleibt gleich*
- Aufrollen: *Seilkraft wird* ☐ *kleiner* ☐ *größer* ☐ *bleibt gleich*

Erklären Sie den Effekt der Bewegung auf die Seilkraft anhand des Impulssatzes (2.8).

2.5 Literatur

D. Bestle: Skript zur Technischen Mechanik 1 – Statik und Festigkeitslehre

D. Bestle: Skript zur Technischen Mechanik 2 – Dynamik

Lehrbücher der Schulphysik