1 Einführung in MATLAB/Simulink

1.1 Motivation

MATLAB wurde in den 1970ern als Matrix Laboratory von Cleve Moler an der University of New Mexico entwickelt, um den Studierenden ein schnelles Experimentierfeld für die Untersuchung mathematischer Zusammenhänge in der linearen Algebra zu ermöglichen. Durch die Entwicklung von additiven Toolboxen in verschiedenen technischen Disziplinen hat es sich bis heute zu einem kommerziellen Programmpaket und beliebten Standard an Universitäten und den Forschungs- und Entwicklungsabteilungen der Industrie entwickelt. Daher soll es im Rahmen des Mechanik-Praktikums als Grundlage für die schnelle Analyse experimenteller Daten und in Verbindung mit der Simulink-Toolbox für die effiziente Simulation dynamischer Vorgänge genutzt werden. Dazu werden in diesem ersten Praktikumsversuch die wesentlichen Befehle dargestellt und an Beispielen geübt.

Aktuell verfügt die Brandenburgische Technische Universität Cottbus-Senftenberg über kostenlose Campus-Lizenzen für Matlab/Simulink. Unter dem Menüpunkt „Wie können die Lizenzen genutzt werden?“ sind des Weiteren ausführliche Installationshinweise verfügbar.

1.2 Versuchsvorbereitung

In Vorbereitung auf den Praktikumsversuch sind die folgenden theoretischen Überlegungen nachzuvollziehen und die Vorbereitungsfragen handschriftlich auszuarbeiten. Ohne diese Grundkenntnisse können die Versuche nicht geeignet durchgeführt werden, weshalb Kandidaten bei ungenügender Vorbereitung vom Versuch ausgeschlossen werden. Das Programm und die Rechner werden vom Lehrstuhl bereitgestellt.

1.2.1 Arbeiten mit MATLAB

Matrizen sind im Bereich des Ingenieurwesens ein mächtiges mathematisches Instrument, um Beziehungen zwischen vielen Größen kompakt darzustellen und zu verarbeiten. So kann beispielsweise ein System aus zwei Gleichungen in zwei Unbekannten

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \tag{1.1}$$

kompakt als

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$, der Spaltenmatrix $\mathbf{b}$ der rechten Seite und der Spaltenmatrix $\mathbf{x}$ der Unbekannten dargestellt werden. Falls die Koeffizientenmatrix nicht singulär ist, lautet die Lösung kompakt $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Diese Darstellung ist auf beliebig viele Gleichungen für beliebig viele Unbekannte erweiterbar. Für das Rechnen mit Matrizen gibt es einfache Regeln wie $\mathbf{A} \pm \mathbf{B}$, $\mathbf{AB}$, $\lambda\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^T$, $\mathbf{A}^{-1}$.

Die Matrizendarstellung ist auch für die Untersuchung funktioneller Zusammenhänge geeignet. Eine reell-wertige Funktion $y = f(x)$ ordnet jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl y zu. Aus Zeitgründen wird man sich i. Allg. auf die Auswertung der Funktion an endlich vielen Stützstellen $x_i, i=1\ldots N,$ beschränken, die man in einer Zeilenmatrix $\mathbf{x}^T = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_N]$ zusammenfassen kann. Die Funktionswerte $y_i = f(x_i), i=1\ldots N,$ würde man dann ebenfalls in einer Zeilenmatrix $\mathbf{y}^T = [y_1 \quad y_2 \quad \ldots \quad y_N]$ zusammenfassen. Für die elementaren Funktionen (sin, cos, log, e^x, etc.) erlaubt MATLAB eine elementweise Auswertung der gesamten Zeilenmatrix im Sinne von $\mathbf{y}^T = f\left(\mathbf{x}^T\right)$ bzw. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$. Auch eine elementweise Verknüpfung von Elementen zweier Matrizen wie die Multiplikation $z_i = x_i \cdot y_i, i=1\ldots N,$ ist damit möglich.

Für die Funktionsanalyse trägt man dann die Wertepaare $(x_i, y_i), i=1\ldots N,$ in ein Diagramm ein, s. Bild 1.1 für die Wurfparabel

$$y(x) = (\tan\alpha)\,x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2\,. \tag{1.3}$$

Diese entsteht durch eine Überlagerung der gleichförmigen horizontalen Bewegung

$$x(t) = (v_0\cos\alpha)\,t\,, \tag{1.4}$$

die durch die Horizontalkomponente der Abwurfgeschwindigkeit v_0 mit dem Winkel α initiiert wird, und der beschleunigten Vertikalbewegung

$$y(t) = (v_0\sin\alpha)\,t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{1.5}$$

aufgrund der Erdbeschleunigung g. In der Darstellung (1.4), (1.5) würde man sich einen Zeitvektor $\mathbf{t}^T = [t_1 \quad t_2 \quad \ldots \quad t_N]$ vorgeben, dazu $\mathbf{x}^T = x\left(\mathbf{t}^T\right)$ und $\mathbf{y}^T = y\left(\mathbf{t}^T\right)$ berechnen und ebenfalls als Wertepaare $(x(t_i), y(t_i)), i=1\ldots N,$ auftragen. Aufgrund des linearen Zusammenhangs zwischen x und t führt dies hier zum gleichen Bild, ansonsten würde im Abstand der Punkte die Geschwindigkeit der Bewegung sichtbar werden. Man bezeichnet (1.3) als explizite und (1.4), (1.5) als parametrische Kurvendarstellung.

1.2.2 Simulation mit Simulink

Bei komplizierten dynamischen Zusammenhängen gelingt eine explizite Darstellung der Bewegung i. Allg. nicht mehr und man ist auf die numerische Integration von differenziellen Beziehungen angewiesen. Die Toolbox Simulink bietet eine graphische

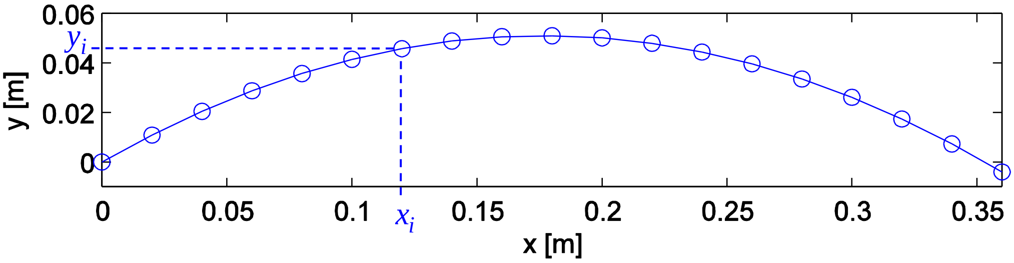


Bild 1.1: Wurfparabel des schiefen Wurfs mit $v_0 = 2\text{m/s},\ \alpha = \pi/6$

Oberfläche, um solche differenziellen Zusammenhänge mithilfe von Funktionsblöcken und Verbindungslinien zu formulieren, um sie dann anschließend zu integrieren.

Bild 1.2 zeigt die wichtigsten, im Praktikum benötigten Funktionsblöcke mit ihrer Bedeutung. Diese werden z.T. in Bild 1.3 benutzt, um den schiefen Wurf (1.4), (1.5) zu simulieren. Ausgehend von den Beschleunigungen $a_x = 0$, $a_y = -g$ werden durch Integration die Geschwindigkeiten v_x bzw. v_y und durch eine weitere Integration die Koordinaten s_x bzw. s_y gewonnen. Abwurfgeschwindigkeit und –winkel verstecken sich jeweils als Horizontal- und Vertikalkomponenten in den Anfangsbedingungen

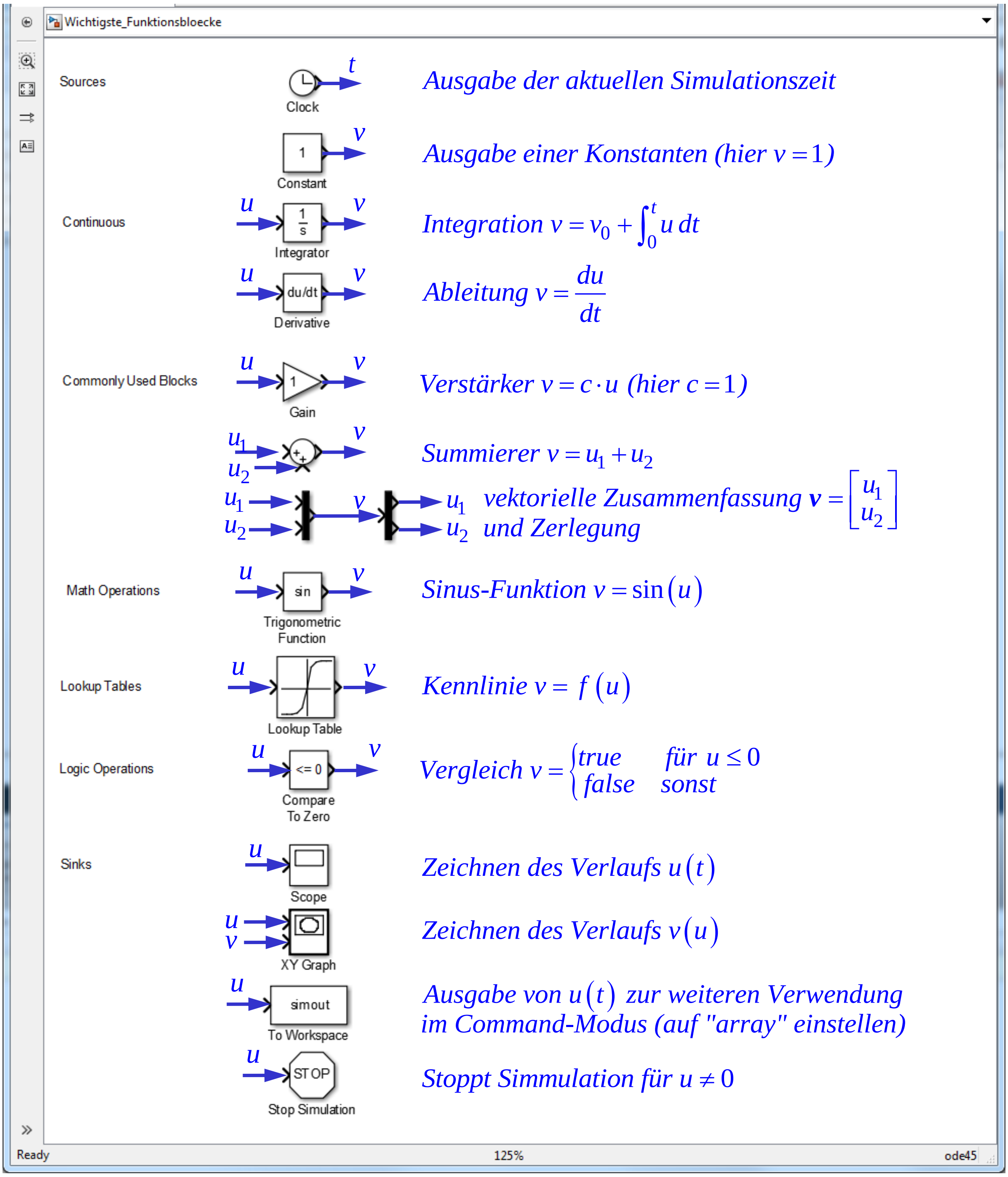


Bild 1.2: Die wichtigsten Simulink-Funktionsblöcke und ihre Bedeutung

der Integrationsblöcke für v_x und v_y und können durch Doppelklicken auf diese Blöcke sichtbar gemacht werden. Abschließend wird die Bewegung graphisch in einem x, y-Diagramm dargestellt.

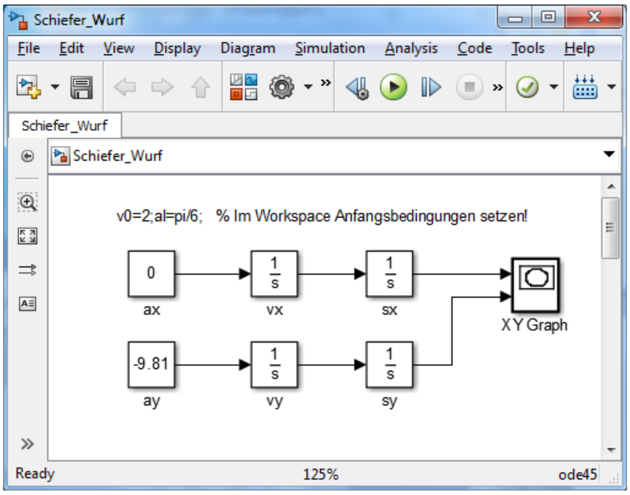


Bild 1.3: Simulink-Diagramm für den schiefen Wurf

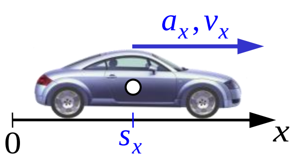
1.3 Vorbereitungsfragen

- Definieren Sie natürliche, ganze, rationale, irrationale, reelle und komplexe Zahlen.
- Was versteht man unter Skalarprodukt, dyadischem Produkt und Vektorprodukt? Wie sind Einheitsmatrix, transponierte Matrix und inverse Matrix definiert?
- Bestimmen Sie mit den Matrizen in Aufgabe 1.4.1.1 folgende Größen und Terme:

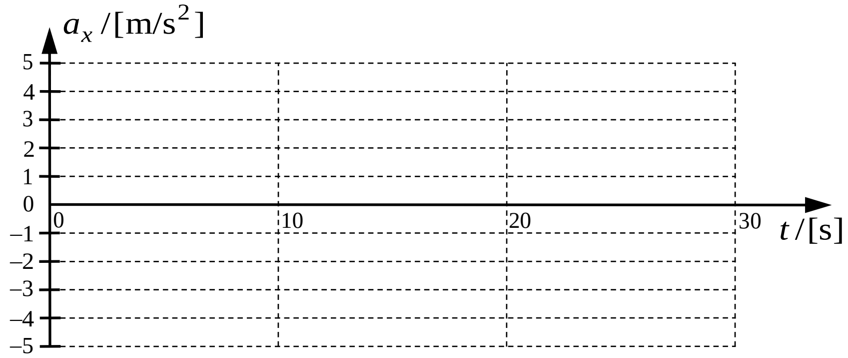
$$\mathbf{a}^T\mathbf{c},\quad \mathbf{a}^T\mathbf{b},\quad \mathbf{a}\mathbf{b}^T,\quad \mathbf{a}\mathbf{c}^T,\quad \mathbf{a}+\mathbf{b},\quad \mathbf{a}+\mathbf{c},\quad 2\mathbf{c},$$
$$2\mathbf{A},\quad \mathbf{A}^2=\mathbf{A}\mathbf{A},\quad \mathbf{C}^{-1},\quad \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$$

- Wie lautet mit diesen Matrizen die Lösung des Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{a}$? Berechnen Sie die Lösung von $\mathbf{B}\mathbf{x}=\mathbf{b}$.
- Wie entstehen die Gleichungen (1.4), (1.5)? Zeigen Sie, dass daraus durch Elimination der Zeit Gleichung (1.3) folgt.
- Die Abwurfgeschwindigkeit v_0 des schiefen Wurfs lässt sich i. Allg. nur sehr ungenau realisieren, so dass die tatsächliche Abwurfgeschwindigkeit $v_0 \in [\bar{v}_0 - \Delta v, \bar{v}_0 + \Delta v]$ um einen Mittelwert $\bar{v}_0$ schwankt. Welche Unsicherheit entsteht daraus nach dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz für die in Gleichung (1.3) definierte Größe $y(x)$?
- Zeichnen Sie die Funktionen $x(t)=2\sin(\pi t)$ und $y(t)=2\pi\cos(\pi t)$ für $t\in[0,3]$. In welchem Zusammenhang stehen die beiden Funktionen zueinander? Welches Bild ergibt sich im x, y-Diagramm?

- Ein Auto fährt aus dem Stand mit der konst. Beschleunigung $a_x = 3\,\mathrm{m/s^2}$ los. Nach $10\,\mathrm{s}$ fährt es für weitere $10\,\mathrm{s}$ mit konstanter Geschwindigkeit. Danach wird ein Bremsmanöver mit $5\,\mathrm{m/s^2}$ eingeleitet, das nach $5\,\mathrm{s}$ abgebrochen wird.



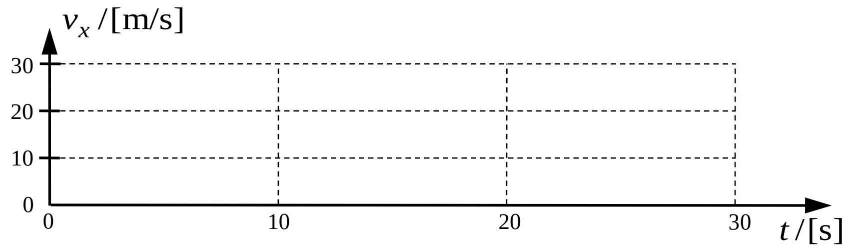
Zeichnen Sie das Beschleunigungsdiagramm für den gesamten Fahrvorgang.



Welche Geschwindigkeit ergibt sich mit der Integrationsformel

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x\,dt \;?$$

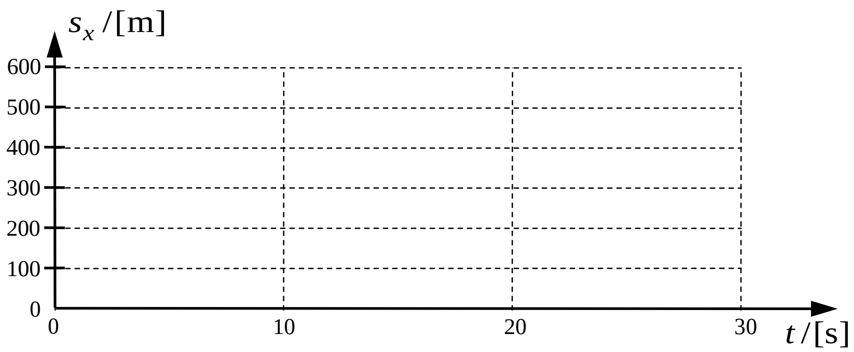
Zeichnen Sie auch diesen Verlauf.



Berechnen Sie den zurückgelegten Weg

$$s_x = s_{x0} + \int_0^t v_x\,dt$$

und zeichnen Sie auch diesen. Wann und wo kommt das Auto zum Stehen, falls die Bremsbeschleunigung lange genug wirkt?



1.4 Versuchsdurchführung

1.4.1 Aufgaben zu Matlab

1.4.1.1 Definieren Sie folgende Größen in MATLAB:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 13 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_6 = [0 \ldots 0 \; \underset{\substack{\uparrow \\ 6}}{1} \; 0 \ldots 0] \in \mathbb{R}^{15}$$

1.4.1.2 Erstellen Sie zunächst eine 5×5-Matrix $\mathbf{Z}$ mit gleichverteilten Zufallszahlen im Bereich [0,1]. Setzen Sie dann alle Werte der zweiten Zeile auf Eins. Geben Sie die 3. und 4. Spalte aus. Vertauschen Sie die 2. und 4. Zeile. Löschen Sie die 2. Spalte.

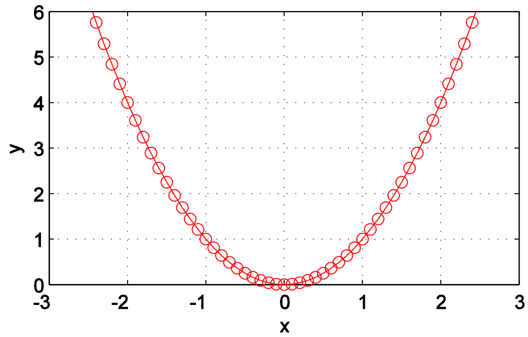
1.4.1.3 Was bedeuten folgende Ausdrücke mit den Größen aus Aufgabe 1.4.1.1?

a*c	a'*b	a'*c	a*b'	a.*c'	a+c'	2.^a	
sin(A)	2*A	A^2	A.^2	A\C	A/C	A\a	B\b

1.4.1.4 Zeichnen Sie die Funktionen $x(t)=2\sin(\pi t)$ und $y(t)=2\pi\cos(\pi t)$ sowie $y(x)$ für $t\in[0,3]$.

1.4.1.5 Zeichnen Sie die Funktion (1.3) ergänzt um die Unsicherheit $\pm\Delta y$ für $\Delta v=0.05\,\mathrm{m/s}$.

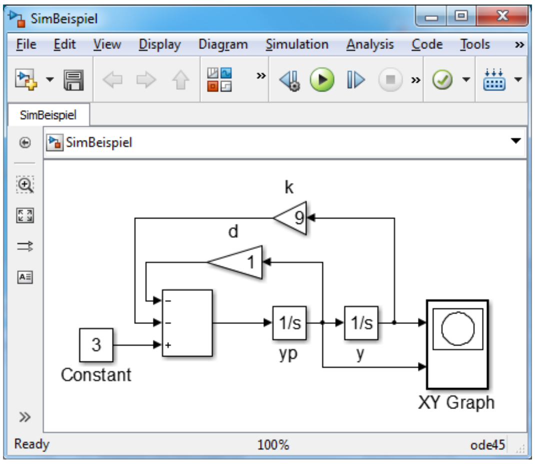
1.4.1.6 Erzeugen Sie nebenstehendes Bild für die Funktion $y=x^2$.



1.4.2 Aufgaben zu Simulink

1.4.2.1 Wie lautet die Differentialgleichung für nebenstehendes Simulink-Diagramm?

1.4.2.2 Erstellen Sie ein Simulink-Diagramm für die Simulation des oben beschriebenen Beschleunigungsvorgangs eines Autos?



1.5 Literatur

D. Bestle: Skript zur Technischen Mechanik 2 - Dynamik, Kapitel 2

Lehrbücher der Schulphysik und Schulmathematik