Prüfung Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken (für trigonometrische Terme Abkürzungen verwenden: $s_\alpha = \sin\alpha$, $c_\alpha = \cos\alpha$)
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 120 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

.....
(Unterschrift)

Punkte	Note	

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Die Rotation eines Starrkörpers besteht aus zwei hintereinander geschalteten Drehungen beschrieben durch die Drehmatrizen $\boldsymbol{S}_1$ (erste Drehung) und $\boldsymbol{S}_2$ (zweite Drehung).

a) Wie berechnen sich aus $\boldsymbol{S}_1$ und $\boldsymbol{S}_2$ jeweils die schiefsymmetrischen Matrizen der Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega}_1$ und $\vec{\omega}_2$ der beiden Teildrehungen?

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 =$ _____ , $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2 =$ _____

b) Wie berechnet sich die Drehmatrix der Gesamtdrehung?

☐ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1^T\boldsymbol{S}_2$ ☐ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{S}_2$ ☐ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1$ ☐ $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{S}_1^T$

c) Bestimmen Sie folgende Größen:

$\dot{\boldsymbol{S}} =$ _____ , $\boldsymbol{S}^T =$ _____

$\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}^T =$ _____

d) Wie berechnet sich damit die schiefsymmetrische Matrix $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ der Winkelgeschwindigkeit der Gesamtdrehung aus $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$ und $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_2$?

$\tilde{\boldsymbol{\omega}} =$ _____

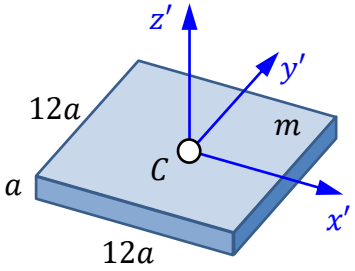
e) Welchen Zusammenhang erhält man daraus für die Winkelgeschwindigkeiten?

☐ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ ☐ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{S}_1\boldsymbol{\omega}_2$

☐ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{S}_1^T\boldsymbol{\omega}_2$ ☐ $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{S}_2\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Am Berliner Hauptbahnhof hatte ein bekannter Schokoladenhersteller zu Werbezwecken einen Turm aus dünnen Quadern (jeweils Masse m, quadratische Fläche $12a \times 12a$, Dicke a) errichtet.



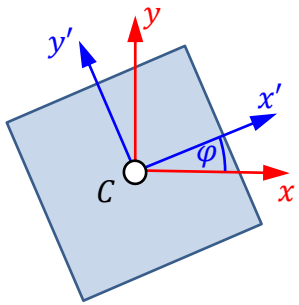
a) Wie lautet der Massenträgheitstensor eines einzelnen Quaders bzgl. seines Schwerpunkts C im körperfesten Koordinatensystem $\{C; x', y', z'\}$, wenn dieser wegen $a \ll 12a$ als Platte betrachtet wird?

$$\boldsymbol{I}'_C = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

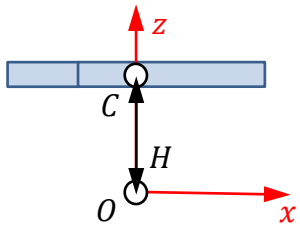
b) Wie transformiert sich dieser Trägheitstensor für eine um den Winkel φ verdrehte Platte ins Koordinatensystem $\{C; x, y, z\}$?

$$\boldsymbol{I}_C = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \boldsymbol{I}'_C \boldsymbol{S}^T$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

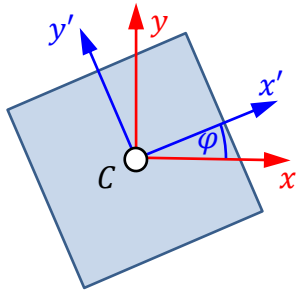


c) Wie transformiert sich der Trägheitstensor in den Koordinatenursprung O eines Koordinatensystems $\{O; x, y, z\}$, wenn die Platte zusätzlich zur Verdrehung um den Abstand H in z-Richtung verschoben wird?



$$\boldsymbol{I}_O = \boldsymbol{I}_C + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

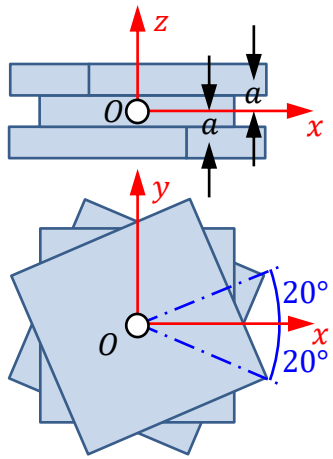


d) Welche Gestalt hat der Trägheitstensor $\boldsymbol{I}_O$?

- ☐ *kugelsymmetrischer Hauptachsentensor*
- ☐ *achsensymmetrischer Hauptachsentensor*
- ☐ *beliebiger Hauptachsentensor*
- ☐ *kein Hauptachsentensor*

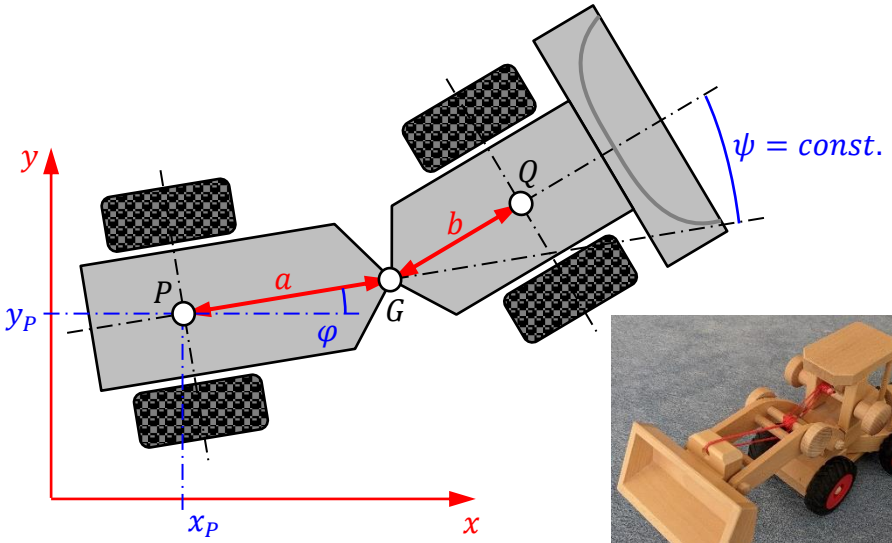
e) Wie lautet der Hauptachsentensor für ein Paket aus drei Platten?

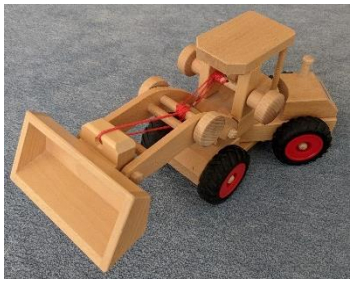
- ☐ $\boldsymbol{I}_O^{(3)} = \begin{bmatrix} 38 & 2 & 0 \\ 2 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{bmatrix} ma^2$
- ☐ $\boldsymbol{I}_O^{(3)} = \begin{bmatrix} 38 & 0 & 0 \\ 0 & 38 & 0 \\ 0 & 0 & 72 \end{bmatrix} ma^2$
- ☐ $\boldsymbol{I}_O^{(3)} = \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 74 \end{bmatrix} ma^2$



Aufgabe 3 (12 Punkte)

Ein Radlader mit Knicklenkung besteht aus zwei Teilen mit einem Gelenk G dazwischen, das im realen Fall über das Lenkrad gesteuert wird. Bei festgehaltenem Lenkrad ist der Knickwinkel ψ fixiert.

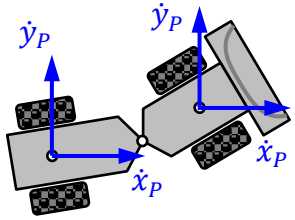


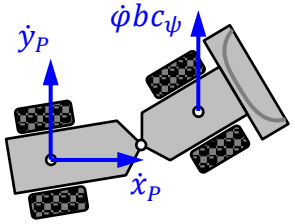


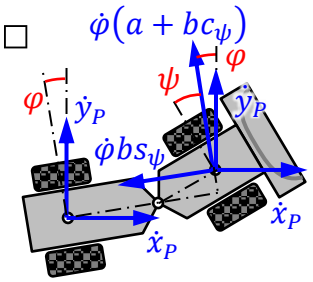
a) Durch welche verallgemeinerten Koordinaten lasst sich der Radlader beschreiben, wenn die Räder zunächst frei gleiten können?

☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_P \\ \varphi \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ \varphi \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$

b) Welche Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich daraus mit $s_\psi = \sin\psi$, $c_\psi = \cos\psi$ in den Punkten P und Q?

☐ 

☐ 

☐ 

c) Formulieren Sie die impliziten Geschwindigkeitsbindungen, die sich aus dem Rollen der Räder ergeben.

$v_{P,quer} =$ _____ $\overset{!}{=} 0$

$v_{Q,quer} =$ _____

_____ $\overset{!}{=} 0$

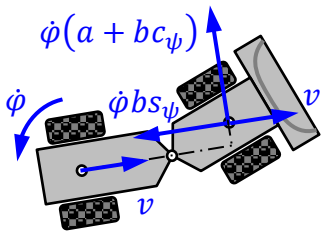
d) Fassen Sie die impliziten Geschwindigkeitsbindungen in Matrizenform $\boldsymbol{A}\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ zusammen.

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$$

e) Welchen Geschwindigkeitsfreiheitsgrad hat der Radlader mit rollenden Rädern?

☐ $g = 1$ ☐ $g = 2$ ☐ $g = 3$ ☐ $g = 4$

f) Eine **mit der Hinterachse verträgliche** Geschwindigkeitsbeschreibung besteht aus Längsgeschwindigkeit v und Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$. Welche Geschwindigkeitsbindung bleibt damit aus dem Rollen der Vorderräder?



$v_{Q,quer} =$ _____ $\overset{!}{=} 0$

g) Welche explizite Formulierung $\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{z}$ ergibt sich aus dem Rollen aller Räder mit der verallgemeinerten Geschwindigkeit $\boldsymbol{z} = [v]$?

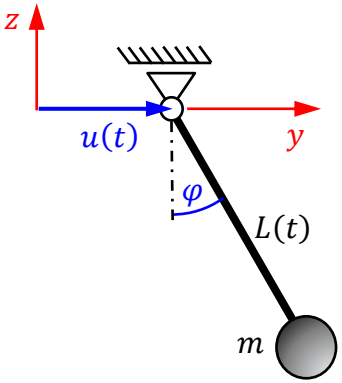
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_P \\ \dot{y}_P \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} v$$

h) Klassifizieren Sie das System.

☐ *holonom* ☐ *nichtholonom*

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Ein Punktpendel (Masse m) hat eine zeitlich veränderliche Pendellänge $L(t)$ und einen mit $u(t)$ horizontal bewegten Aufhängepunkt. Beide Zeitfunktionen sind vorgegeben.



a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Systems?

☐ $\boldsymbol{y} = [u]$ ☐ $\boldsymbol{y} = [\varphi]$

☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} u \\ L \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ L \end{bmatrix}$

b) Beschreiben Sie die Lage des Pendelkörpers im Koordinatensystem.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die zugehörige Geschwindigkeit und Beschleunigung des Massenpunkts.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{J}_{T1}\, \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

d) Welche eingeprägte Kraft wirkt auf das System?

$$\boldsymbol{f}_1^e = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

e) Welche Bewegungsgleichung ergibt sich für das Punktpendel?

☐ $mL^2\, \ddot{\varphi} + m\left(2L\dot{L}\dot{\varphi} + L\ddot{u}\cos\varphi\right) = -mgL\sin\varphi$

☐ $mL\, \ddot{\varphi} + m\left(2L\dot{L}\dot{\varphi} + L\ddot{u}\cos\varphi\right) = -mgL\sin\varphi$

☐ $mL\dot{L}\, \ddot{\varphi} + m\left(2L\dot{L}\dot{\varphi} + L\ddot{u}\cos\varphi\right) = -mgL\sin\varphi$

f) Klassifizieren Sie das System.

☐ *linear zeitinvariant* ☐ *nichtlinear zeitinvariant*

☐ *linear zeitvariant* ☐ *nichtlinear zeitvariant*

g) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Pendelwinkel.

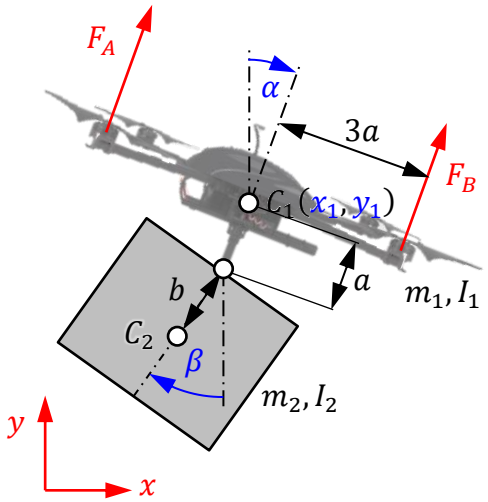
$$_____\ \ddot{\varphi} + _____\ \dot{\varphi} + _____\ \varphi = _____$$

Aufgabe 5 (21 Punkte)

Ein Paket (Masse m_2, Hauptträgheitsmoment I_2 bzgl. Schwerpunkt C_2) wird mit einer Drohne (Masse m_1, Hauptträgheitsmoment I_1 bzgl. Schwerpunkt $C_1(x_1, y_1)$) befördert. Das Paket ist im Abstand a gelenkig unter der Drohne befestigt, die Steuerung der Drohne erfolgt über die Auftriebskräfte F_A und F_B. Mit dem Lagevektor

$$\boldsymbol{y} = [x_1, y_1, \alpha, \beta]^T$$

ergibt sich mit NEWEUL in der x, y-Ebene die Bewegungsgleichung $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}$ mit




```
C>  Massenmatrix
    M(1,1)=M1+M2
    M(2,1)=0.
    M(2,2)=M1+M2
    M(3,1)=-M2*A*COS(AL)
    M(3,2)=M2*A*SIN(AL)
    M(3,3)=I1+M2*A**2
    M(4,1)=-M2*B*COS(BE)
    M(4,2)=M2*B*SIN(BE)
    M(4,3)=M2*B*A*COS(BE)*COS(AL)+M2*B*A*SIN(BE)*SIN(AL)
    M(4,4)=I2+M2*B**2

C>  Verallgemeinerte Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskraefte
    K(1)=M2*A*ALP**2*SIN(AL)+M2*B*BEP**2*SIN(BE)
    K(2)=M2*A*ALP**2*COS(AL)+M2*B*BEP**2*COS(BE)
    K(3)=-M2*B*A*BEP**2*SIN(BE)*COS(AL)+M2*B*A*BEP**2*SIN(AL)*
   *    COS(BE)
    K(4)=-M2*B*A*ALP**2*SIN(AL)*COS(BE)+M2*B*A*ALP**2*SIN(BE)*
   *    COS(AL)

C>  Verallgemeinerte eingepraegte Kraefte
    QE(1)=FA*SIN(AL)+FB*SIN(AL)
    QE(2)=-GE*M1+FA*COS(AL)+FB*COS(AL)-GE*M2
    QE(3)=-GE*M2*A*SIN(AL)-3.*FB*A+3.*FA*A
    QE(4)=-GE*M2*B*SIN(BE)
```

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichung in Standardform unter Verwendung der Bezeichnungen in der Aufgabenstellung (GE$\triangleq g$) und mit Abkürzungen $s_\bullet$, $c_\bullet$ für trigonometrische Funktionen.

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

b) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Pendelwinkel $\alpha, \beta \ll 1$.

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Klassifizieren Sie das System und begründen Sie Ihre Wahl.

☐ *gedämpft nicht konservativ*

☐ *ungedämpft nicht konservativ*

☐ *ungedämpft konservativ*

Grund: _

d) Spalten Sie die Matrix $\boldsymbol{Q}$ der lageproportionalen Kräfte auf in ihre symmetrischen und asymmetrischen Anteile.

$$\boldsymbol{Q} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{symmetrisch} + \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{schiefsymmetrisch}$$

e) Wie groß sind die Auftriebskräfte und Pendelwinkel, wenn die Drohne quasi-statisch in der Luft schwebt?

$F_A =$ _ _ _ _ _ _ _ _ , $F_B =$ _ _ _ _ _ _ _ _

$\alpha =$ _ _ _ _ _ _ , $\beta =$ _ _ _ _ _ _

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Ein System mit reellem Parameter $a \in \mathbb{R}$ hat das folgende charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (1-a)\lambda^3 - (4+a)\lambda^2 + (6+4a)\lambda - 6a\,.$$

a) Führen Sie mit dem vermutlichen Eigenwert $\lambda_1 = a$ eine Polynomdivision durch und zeigen Sie jeweils Ihre Zwischenschritte.

$[\lambda^4 + (1-a)\lambda^3 - (4+a)\lambda^2 + (6+4a)\lambda - 6a] : \left(\qquad \right) =$ _ _ _ _ _ _ _ _

b) Woran erkennen Sie in Teilaufgabe a), dass $\lambda_1 = a$ tatsächlich ein Eigenwert ist?

_ _

c) Eine weitere Polynomdivision mit $(\lambda + 3)$ liefert das verbleibende Polynom 2. Ordnung

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2\,.$$

Geben Sie die weiteren Eigenwerte an.

$\lambda_2 =$ _ _ _ _ _ _ , $\lambda_3 =$ _ _ _ _ _ _ , $\lambda_4 =$ _ _ _ _ _ _

d) Welchen Stabilitätscharakter hat das System?

☐ *asymptotisch stabil für* $a < 0$

☐ *asymptotisch stabil für* $a > 0$

☐ *grenzstabil für* $a = 0$

☐ *instabil*

ENDE