Prüfung
Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken (für trigonometrische Terme Abkürzungen verwenden: $s_\alpha = \sin\alpha,\ c_\alpha = \cos\alpha,\ etc.$)
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 120 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

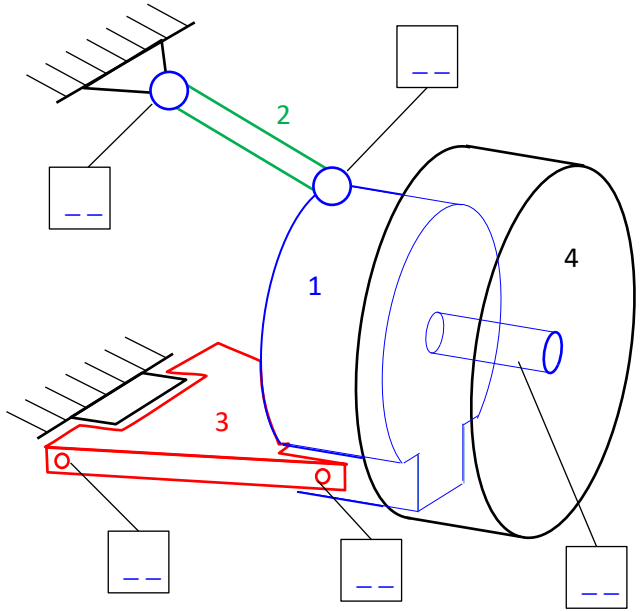
.....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Eine Radaufhängung mit Doppelquerlenker besteht aus Radträger 1 und den beiden Querlenkern 2 und 3. Das Rad 4 kann sich relativ zum Radträger um eine Achse drehen. Der obere Querlenker 2 verbindet den Radträger mit der Karosserie über zwei Kugelgelenke, der untere Querlenker 3 über zwei Drehgelenke.



a) Tragen Sie die jeweiligen Wertigkeiten der Verbindungslager ein.

b) Bestimmen Sie folgende Kennzahlen:

Freiheitsgrad des ungeb. MKS $f^u =$ _____

Summe aller Lagerwertigkeiten $n^c =$ _____

unabh. Lagerwertigkeiten $n =$ _____

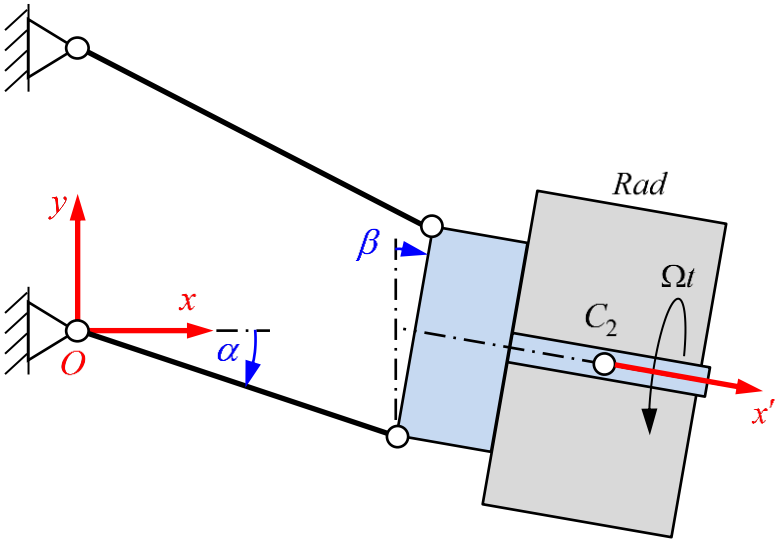
Freiheitsgrad des gebundenen MKS $f =$ _____

überzählige Lagerwertigkeiten $r =$ _____

c) Tragen Sie die verbleibenden Freiheitsgrade in die Skizze ein und benennen Sie diese.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Im Folgenden soll der Winkelgeschwindigkeitsvektor des Rades für die Radaufhängung in Aufgabe 1 bestimmt werden. Das Rad dreht sich nun aber mit konstanter Relativwinkelgeschwindigkeit Ω um die Achse des Radträgers.



a) Welche Elementardrehungen beschreiben die Rotation eines Rad-festen Koordinatensystems $K'\{C_2, x', y', z'\}$ gegenüber dem Inertialsystem $K\{O, x, y, z\}$?

	Drehachse	*Winkel*
1. Elementardrehung	☐ x ☐ y ☐ z	
2. Elementardrehung	☐ x ☐ y ☐ z	

b) Wie berechnet sich die Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}$ für eine Koordinatentransformation von K' nach K aus Elementardrehmatrizen?

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

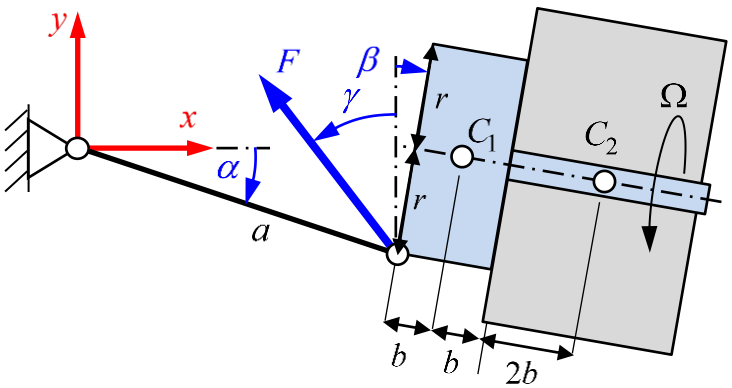
c) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Rades im Inertialsystem K.

$$\boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (19 Punkte)

Nun sollen beide Querlenker als masselos betrachtet werden. Der aufspannende Baum besteht dann aus dem masselosen unteren Querlenker sowie Radträger und Rad (jeweils Masse m und Trägheitstensor $diag(I_a, I_r, I_r)$ im körperfesten Koordinatensystem bez. Schwerpunkt C_i). Die Gelenkpunkte und Schwerpunkte liegen jeweils in der xy-Ebene, das Rad dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit Ω um die Achse des Radträgers. Neben den Gewichtskräften wirkt auf den Radträger die Kraft F des Federbeins ebenfalls in der xy-Ebene.



a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Baums?

☐ $\boldsymbol{y} = [\alpha]$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \Omega \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$

b) Geben Sie die Ortsvektoren zu den beiden Schwerpunkten C_i an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} _____ \\ _____ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} _____ \\ _____ \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper (Hinweis: vgl. Ergebnis in Aufgabe 2).

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Bestimmen Sie die Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen der beiden Körper.

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{J}_{T_1} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{J}_{T_2} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \boldsymbol{J}_{R_1} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \boldsymbol{J}_{R_2} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

e) Welche eingeprägten Kräfte und Momente wirken auf das System?

$$\boldsymbol{f}_1^e = \begin{bmatrix} - - - - - - - - \\ \\ - - - - - - - - \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_1^e = \begin{bmatrix} - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ \\ - - - - - - - - - - - - - - - - - - \\ \\ \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_2^e = \begin{bmatrix} - - - - - - - - \\ \\ - - - - - - - - \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2^e = \begin{bmatrix} - - - - - - - - \\ \\ - - - - - - - - \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Mit NEWEUL findet man für den aufspannenden Baum in Aufgabe 3 folgende nichtlineare Bewegungsgleichung $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k} = \mathbf{q}$:

```
C>    Massenmatrix
       M(1,1)=2.*M*A**2
C
       M(2,1)=5.*M*B*A*SIN(BE)*SIN(AL)-2.*M*R*A*SIN(AL)*COS(BE)+
      +        5.*M*B*A*COS(BE)*COS(AL)+2.*M*R*A*SIN(BE)*COS(AL)
       M(2,2)=2.*IR+2.*M*R**2+17.*M*B**2
C>
C>    Verallgemeinerte Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskraefte
       K(1)=5.*M*B*A*BEP**2*SIN(AL)*COS(BE)+2.*M*R*A*BEP**2*
      *      SIN(BE)*SIN(AL)-5.*M*B*A*BEP**2*SIN(BE)*COS(AL)+
      +      2.*M*R*A*BEP**2*COS(BE)*COS(AL)
       K(2)=5.*M*B*A*ALP**2*SIN(BE)*COS(AL)-2.*M*R*A*ALP**2*
      *      COS(BE)*COS(AL)-5.*M*B*A*ALP**2*SIN(AL)*COS(BE)-
      -      2.*M*R*A*ALP**2*SIN(BE)*SIN(AL)
C>
C>    Verallgemeinerte eingepraegte Kraefte
       QE(1)=F*A*SIN(GA)*SIN(AL)+2.*GE*M*A*COS(AL)-F*A*COS(GA)*
      *       COS(AL)
       QE(2)=5.*GE*M*B*COS(BE)+2.*GE*M*R*SIN(BE)
```

a) Linearisieren Sie zunächst die Matrizen $\mathbf{M}$, $\mathbf{k}$ und $\mathbf{q}$ für $\alpha, \beta \ll 1$ und geben Sie diese mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 3 in einer möglichst kompakten Form an, indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern?

$$\boldsymbol{M} \approx \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k} \approx \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{q} \approx \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b) Wie lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen für $\alpha, \beta \ll 1$?

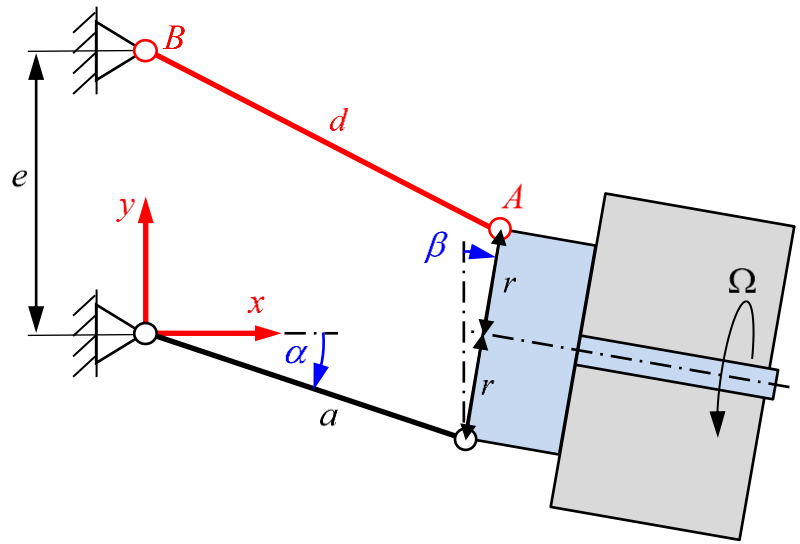
$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Welchen Einfluss hat die Winkelgeschwindigkeit des Rades auf die Bewegung der Radaufhängung?

- ☐ *Kreiselwirkung hebt die Radaufhängung*
- ☐ *Kreiselwirkung senkt die Radaufhängung*
- ☐ *keinen*

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Der aufspannende Baum der Aufgabe 3 kann durch Einbringen des masselosen oberen Querlenkers in die Radaufhängung aus Aufgabe 1 überführt werden.



a) Welche Koordinaten haben der Gelenkpunkt A im aufspannenden Baum und der Karosserieanlenkpunkt B, und wie lautet der Differenzvektor von B nach A?

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{bmatrix} _____ \\ _____ \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_B = \begin{bmatrix} _____ \\ _____ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_{BA} = \begin{bmatrix} _____ \\ _____ \end{bmatrix}$$

b) Welche Bindungsgleichung ergibt sich aus dem oberen Querlenker mit der Länge d?

☐ $c = a^2 + 4r^2 - d^2 - e^2 = 0$

☐ $c = (a\cos\alpha + 2r\sin\beta)^2 + (-a\sin\alpha + 2r\cos\beta - e)^2 - d^2 = 0$

☐ $c = a\cos\alpha + 2r\sin\beta - d = 0$

c) Linearisieren Sie die Bindungsgleichung für $\alpha, \beta \ll 1$?

$$c(\alpha,\beta) \approx \frac{_____}{_____} = 0$$

d) Leiten sie die linearisierte Bindungsgleichung zweimal nach der Zeit ab?

$$\dot{c} \approx \frac{_____}{_____} = 0$$

$$\ddot{c} \approx \frac{_____}{_____} = 0$$

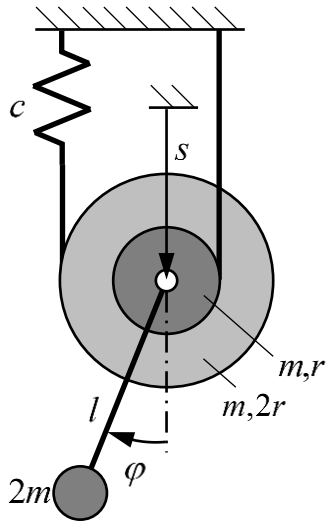
e) Wie lautet die differential-algebraische Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen $\alpha, \beta \ll 1$ der Radaufhängung unter Verwendung des linearisierten Ergebnisses in Aufgabe 4b?

$$\begin{bmatrix} _____ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} __ \\ __ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _____ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Ein Schwingungssystem besteht aus einer vertikal geführten Doppelrolle und einem pendelnden Gewicht. Die linearisierte Bewegungsgleichung lautet für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2ml^2 & 0 \\ 0 & \frac{13}{2}m \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{s} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2mgl & 0 \\ 0 & 9c \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} \varphi \\ s \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,.$$



a) Berechnen Sie folgendes Matrizenprodukt:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet die Zustandsform?

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \varphi \\ s \\ \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{bmatrix}$$

Wie bezeichnet man $\mathbf{A}$?

_____

c) Berechnen Sie

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

d) Bilden Sie die Taylorreihe 2. Ordnung der Fundamentalmatrix?

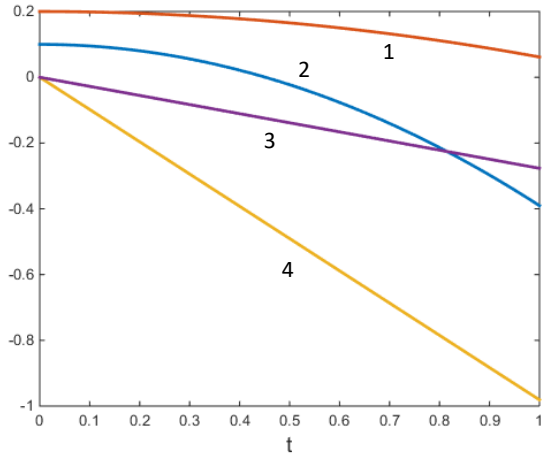
$$\mathbf{\Phi} \approx$$

_____
(*Formel*)

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

e) Das Bild zeigt Simulationsergebnisse für die Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = [.1 \quad .2 \quad 0 \quad 0]^T$. Ordnen Sie die Kurven den einzelnen Zustandsgrößen zu.

	Kurve
φ	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
$\dot{\varphi}$	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
s	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4
$\dot{s}$	☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4



E N D E