Prüfung
Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 120 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

.....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl:	72
zum Bestehen erforderlich:	36

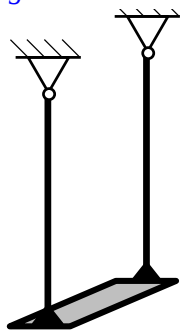
Punkte	Note	

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Im Folgenden sollen unterschiedliche räumliche Modellierungen einer Schaukel hinsichtlich Freiheitsgrad f^u des ungebundenen Systems, Zahl der Bindungen n^c, Freiheitsgrad f des gebundenen Systems und Redundanz r der Bindungen untersucht werden. Geben Sie jeweils die Werte der Kennzahlen an, tragen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten in die Zeichnung ein, und begründen Sie Bindungsredundanzen anschaulich.

a) Im ersten Fall verbinden Stangen das Schaukelbrett mit der Aufhängung. Schaukelbrett und Stangen bilden einen einzelnen starren Körper, der an zwei Kugelgelenken aufgehängt ist.

verallgemeinerte Koordinaten



Kennzahl	f^u	n^c	f	r
Wert				

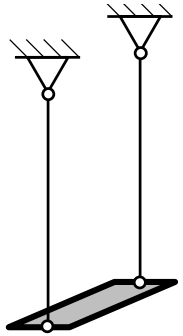
ggf. Begründung von $r \neq 0$*:*

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

b) Im zweiten Fall werden zwei masselose, undehnbare Seile eingesetzt, die stets gespannt sein sollen.

verallgemeinerte Koordinaten



Kennzahl	f^u	n^c	f	r
Wert				

ggf. Begründung von $r \neq 0$*:*

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c) Im dritten Fall werden vier masselose, undehnbare Seile eingesetzt, die stets gespannt sein sollen.

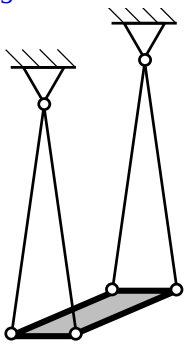
Kennzahl	f^a	n^c	f	r
Wert				

ggf. Begründung von $r \neq 0$:

_____

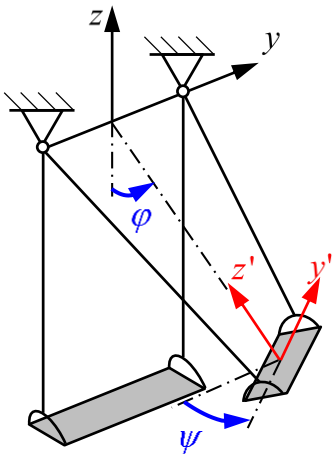
_____

verallgemeinerte Koordinaten



Aufgabe 2 (10 Punkte)

Bei der Modellierung hier schwingt das Schaukelbrett mit dem Winkel φ um die Aufhängeachse und verdrillt sich dabei um den Winkel ψ.



a) Welche Elementardrehungen beschreiben die Rotation des körperfesten Koordinatensystems K' gegenüber dem Inertialsystem K?

	Drehachse	*Winkel*
1. Drehung $K \rightarrow K''$	☐ x ☐ y ☐ z	
2. Drehung $K'' \rightarrow K'$	☐ x ☐ y ☐ z	

b) Wie berechnet sich die Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}$ für eine Koordinatentransformation von K' nach K aus Elementardrehmatrizen?

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

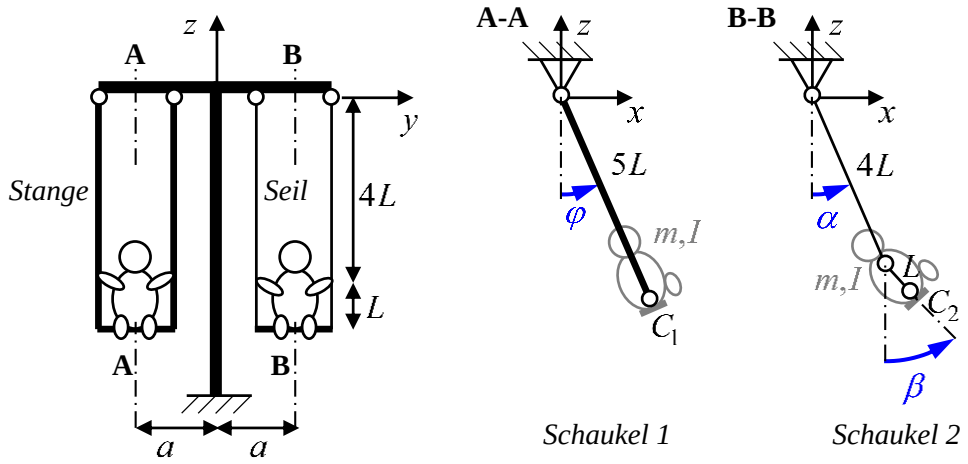
$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit des Schaukelbretts im Inertialsystem K.

$$\boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Nun sind in einem Schaukelsystem zwei unterschiedliche Aufhängungen gleichzeitig realisiert, wobei die Schaukeln selbst jeweils als masselos und die schaukelnden Kinder als starre Körper (jeweils Masse m und Trägheitsmoment I bez. Schwerpunkt C_i) betrachtet werden. Die linke Schaukel 1 mit Stangenaufhängung (Pendellänge $5L$) schwingt in der A-A-Ebene nur mit dem Winkel φ um die Aufhängeachse. Die rechte Schaukel 2 mit Seilaufhängung (Pendellänge $4L$) schwingt in der B-B-Ebene zunächst mit dem Winkel α um die Aufhängeachse, knickt aber zusätzlich am Festhaltepunkt der Hand (Höhe L) ab, so dass das Kind mit dem Winkel β schwingt.



a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Gesamtsystems?

☐ $\boldsymbol{y} = [\varphi]$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ a \\ L \end{bmatrix}$

b) Geben Sie die Ortsvektoren zu beiden Schwerpunkten C_i sowie die Drehmatrizen der schaukelnden Kinder an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten der beiden Kinder.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}, \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}}$$

d) Bestimmen Sie die Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen der beiden Kinder.

$$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{J}_{T_1} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \boldsymbol{J}_{R_1} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{J}_{T_2} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \boldsymbol{J}_{R_2} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

e) Welche eingeprägten Kräfte und Momente wirken auf das System?

$$\boldsymbol{f}_1^e = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{l}_1^e = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{f}_2^e = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{l}_2^e = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Mit NEWEUL findet man für das Schaukelsystem aus Aufgabe 3 folgende nichtlineare Bewegungsgleichung:

```
C>   Massenmatrix

      M(1,1)=I+25.*M*L**2

      M(2,1)=0.
      M(2,2)=16.*M*L**2

      M(3,1)=0.
      M(3,2)=4.*M*L**2*COS(BE)*COS(AL)+4.*M*L**2*SIN(BE)*SIN(AL)
      M(3,3)=I+M*L**2

C>   Verallgemeinerte Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskraefte

      K(1)=0.

      K(2)=-4.*M*L**2*BEP**2*SIN(BE)*COS(AL)+4.*M*L**2*BEP**2*
     *     SIN(AL)*COS(BE)

      K(3)=-4.*M*L**2*ALP**2*SIN(AL)*COS(BE)+4.*M*L**2*ALP**2*
     *     SIN(BE)*COS(AL)

C>   Verallgemeinerte eingepraegte Kraefte

      QE(1)=-5.*GE*M*L*SIN(PHI)

      QE(2)=-4.*GE*M*L*SIN(AL)

      QE(3)=-GE*M*L*SIN(BE)
```

a) Formulieren Sie diese Bewegungsgleichung mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 3 in einer möglichst kompakten Form, indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern und die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta\,,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

der Trigonometrie verwenden:

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{y}}$$

$$+\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

b) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für $\varphi, \alpha, \beta \ll 1$.

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Durch entsprechende Parameterwahl ergibt sich in Aufgabe 3 für kleine Auslenkungen die Bewegungsgleichung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{M}} \begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{K}} \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}\,.$$

a) Wie lautet allgemein die charakteristische Gleichung zur Ermittlung der Eigenwerte λ für den Lösungsansatz $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}\, e^{\lambda t}$?

☐ $\det\left(-\boldsymbol{M}\lambda^2 + \boldsymbol{K}\right) = 0$ ☐ $\det\left(-\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\lambda^2\right) = 0$

☐ $\det\left(\boldsymbol{M}\lambda^2 - \boldsymbol{K}\right) = 0$ ☐ $\det\left(\boldsymbol{M} - \boldsymbol{K}\lambda^2\right) = 0$

☐ $\det\left(\boldsymbol{M}\lambda^2 + \boldsymbol{K}\right) = 0$ ☐ $\det\left(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{K}\lambda^2\right) = 0$

b) Bestimmen Sie die charakteristische Gleichung im vorliegenden Fall und zeigen Sie die wesentlichen Schritte Ihres Lösungswegs (Hinweis: das charakteristische Polynom darf ganz oder teilweise faktorisiert werden).

Lösungsweg:

c) Welche Eigenwerte ergeben sich aus der charakteristischen Gleichung?

☐ $\lambda_1 = 2.48,\quad \lambda_2 = 2.47,\quad \lambda_3 = 6.47$

☐ $\lambda_1 = 2.48\,i,\quad \lambda_2 = 2.47\,i,\quad \lambda_3 = 6.47\,i$

☐ $\lambda_{1,2} = \pm 2.48,\quad \lambda_{3,4} = \pm 2.47,\quad \lambda_{5,6} = \pm 6.47$

☐ $\lambda_{1,2} = \pm 2.48\,i,\quad \lambda_{3,4} = \pm 2.47\,i,\quad \lambda_{5,6} = \pm 6.47\,i$

d) Wie groß sind die zugehörigen Schwingungsfrequenzen?

$f_1 =$ _____ Hz, $f_2 =$ _____ Hz, $f_3 =$ _____ Hz

e) Skizzieren Sie die Auslenkungen von Stange bzw. Seil, die zu den entsprechenden Eigenvektoren $\tilde{\boldsymbol{y}} = [\tilde{\varphi}\ \tilde{\alpha}\ \tilde{\beta}]^T$ gehören.
(Hinweis: Nullauslenkungen sind nachzuzeichnen!)

Eigenvektor	*Schaukel 1 (φ)*	*Schaukel 2 (α,β)*
$f_1:\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$		
$f_2:\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}$		
$f_3:\quad \tilde{\boldsymbol{y}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.3 \\ 1 \end{bmatrix}$		

f) Wie groß ist offensichtlich der Frequenzfehler für die Schaukelgrundschwingung, wenn man das Abknicken des Seils vernachlässigt?

☐ $\Delta f = +4\%$ ☐ $\Delta f = +0.4\%$ ☐ $\Delta f = -0.2\%$ ☐ $\Delta f = -2\%$

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Durch entsprechende harmonische Erregung mit $\Omega = 2\pi\, f_E$ ergibt sich in Aufgabe 3 für kleine Auslenkungen

$$\begin{bmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi} \\ \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 160 & 0 & 0 \\ 0 & 128 & 0 \\ 0 & 0 & 32 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{bmatrix}\cos \Omega t}_{\boldsymbol{h}(t)} .$$

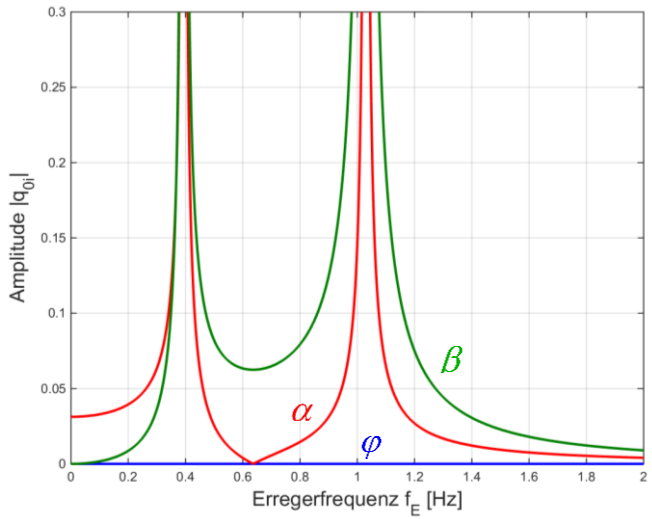
a) Wie lautet die rechte Seite der Differentialgleichung in der komplexen Schreibweise?

$$\mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix} e^{----} + \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

b) Wie berechnet sich der Frequenzgang der stationären Lösung $\mathbf{y}_{stationär}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t} + \bar{\mathbf{q}}_0 e^{-i\Omega t}$?

$$\mathbf{q}_0 = \begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Nebenstehendes Bild zeigt die Beträge der Amplitudenfrequenzgänge der drei verallgemeinerten Koordinaten des Schaukelsystems.



Welche Phänomene können Sie bei welchen Erregerfrequenzen beobachten? Zeichnen Sie jeweils die zugehörigen Schwingungsformen der stationären Schwingung.
(Hinweis: Nullauslenkungen sind nachzuzeichnen!)

Phänomen	*Erregerfrequenz*	*Schwingungsform* φ	α,β
	$f_E \approx$ _____ *Hz*		
	$f_E \approx$ _____ *Hz*		
	$f_E \approx$ _____ *Hz*		

d) Warum ist der Amplitudenfrequenzgang von φ stets Null?

Begründung: _____

_____

E N D E