Prüfung
Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 120 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Das Foto zeigt eine dreiteilige Wippe bei Arzl im Pitztal, Österreich. Die drei Sitzflächen sind gelenkig miteinander verbunden und ruhen auf Spiralfedern.

a) Durch welche Mehrkörperelemente werden die nummerierten Bauteile geeignet repräsentiert und welche Parameter werden für eine räumliche Dynamikanalyse benötigt?

Bauteil	*MKS-Element*	*benötigte Parameter (verbal)*
1. Sitzfläche		
2. Verbindung		
3. Spiralfeder		

b) Welchen Freiheitsgrad hat ein ebenes Modell? Zeichnen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten ein.

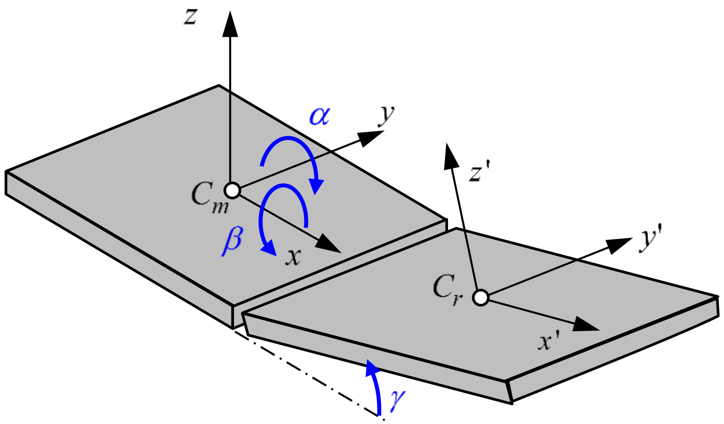
$f =$ ____

c) Welchen Freiheitsgrad hat ein räumliches Modell? Zeichnen Sie geeignete verallgemeinerte Koordinaten ein.

$f =$ ____

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Vernachlässigt man Torsionen um die z-Achse, lässt sich die räumliche Drehbewegung der mittleren Sitzfläche durch den Winkel α um die y-Achse und eine anschließende Kippbewegung um die x-Achse mit dem Winkel β beschreiben. Die rechte vordere Sitzfläche neigt sich zusätzlich um den Winkel γ relativ zur mittleren Sitzfläche.



a) Berechnen Sie die Drehmatrix der mittleren Sitzfläche.

$$\boldsymbol{S}_m = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

b) Welche Winkelgeschwindigkeit hat die mittlere Sitzfläche im Inertialsystem?

$$\boldsymbol{\omega}_m = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c) Wie berechnet sich die Drehmatrix für die rechte vordere Sitzfläche unter Verwendung des Ergebnisses in Teilaufgabe a) ?

☐ $\boldsymbol{S}_r = \boldsymbol{S}_m \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{S}_r = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \boldsymbol{S}_m$

d) Zu welcher Gruppe gehört diese Beschreibung der Drehbewegung der rechten vorderen Sitzfläche?

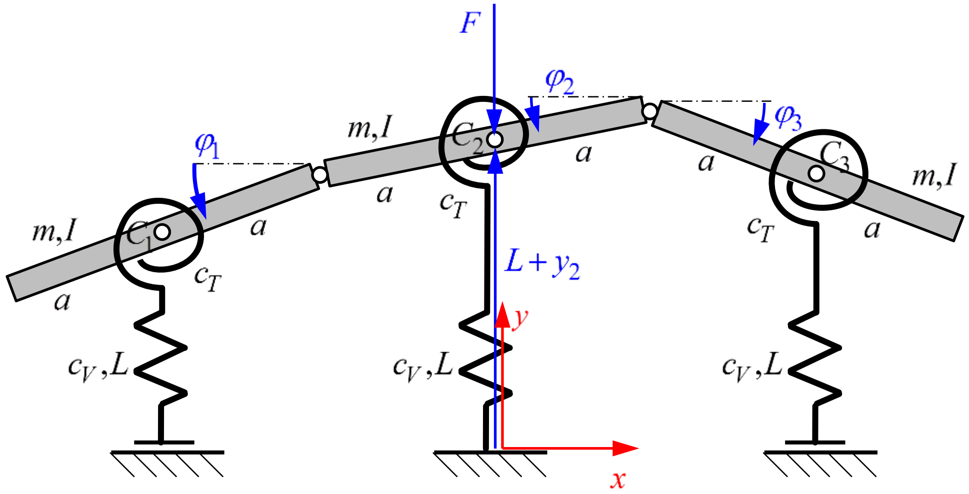
☐ Kardanwinkel ☐ Eulerwinkel ☐ Quaternionen

e) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit der rechten vorderen Sitzfläche im Inertialsystem an?

$$\boldsymbol{\omega}_r = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (19 Punkte)

Im Folgenden soll die ebene Bewegung der dreiteiligen Wippe untersucht werden (jeweils Sitzlänge $2a$, Masse m und Trägheitsmoment I bez. Schwerpunkt C_i). Die Bewegung der mittleren Sitzfläche ergibt sich aus Hub y_2 und Winkel φ_2. Die Neigung der seitlichen Sitzflächen wird durch die Absolutwinkel φ_1 bzw. φ_3 beschrieben. Durch die Spiralfedern entstehen jeweils Hubkräfte (vertikale Steifigkeit c_V, ungespannte Federlänge L) und Momente (Torsionssteifigkeit c_T). Horizontale Federkräfte werden vernachlässigt, indem die Fußpunkte der seitlichen Bewegung virtuell nachgeführt werden. Zusätzlich wirkt auf die mittlere Sitzfläche die Kraft F.



a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Systems?

☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ y_2 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ y_2 \\ F \end{bmatrix}$

b) Geben Sie die Ortsvektoren und Drehmatrizen der drei Sitzflächen an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{r}_3 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_3 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten der drei Sitzflächen.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}, \quad \boldsymbol{\omega}_3 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}}$$

d) Welche eingeprägten Kräfte und Momente wirken auf das System?

$$\boldsymbol{f}_1^e = \left[\quad \right], \quad \boldsymbol{l}_1^e = \left[\quad \right]$$

$$\boldsymbol{f}_2^e = \left[\quad \right], \quad \boldsymbol{l}_2^e = \left[\quad \right]$$

$$\boldsymbol{f}_3^e = \left[\quad \right], \quad \boldsymbol{l}_3^e = \left[\quad \right]$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Mit Neweul findet man für die dreiteilige Wippe aus Aufgabe 3 folgende nichtlineare Bewegungsgleichung:

```
C> Massenmatrix

      M(1,1)=I+M*A**2

      M(2,1)=M*A**2*SIN(PHI2)*SIN(PHI1)+M*A**2*COS(PHI2)*COS(PHI1)
      M(2,2)=I+2.*M*A**2

      M(3,1)=0.
      M(3,2)=M*A**2*SIN(PHI3)*SIN(PHI2)-M*A**2*COS(PHI3)*COS(PHI2)
      M(3,3)=I+M*A**2

      M(4,1)=-M*A*COS(PHI1)
      M(4,2)=0.
      M(4,3)=-M*A*COS(PHI3)
      M(4,4)=3.*M

C> Verallgemeinerte Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskraefte

      K(1)=M*A**2*PHI2P**2*SIN(PHI1)*COS(PHI2)-M*A**2*PHI2P**2*
     *     SIN(PHI2)*COS(PHI1)

      K(2)=M*A**2*PHI1P**2*SIN(PHI2)*COS(PHI1)-M*A**2*PHI1P**2*
     *     SIN(PHI1)*COS(PHI2)+M*A**2*PHI3P**2*SIN(PHI2)*COS(PHI3)+
     +     M*A**2*PHI3P**2*SIN(PHI3)*COS(PHI2)

      K(3)=M*A**2*PHI2P**2*SIN(PHI3)*COS(PHI2)+M*A**2*PHI2P**2*
     *     SIN(PHI2)*COS(PHI3)

      K(4)=M*A*PHI1P**2*SIN(PHI1)+M*A*PHI3P**2*SIN(PHI3)

C> Verallgemeinerte eingepraegte Kraefte

      QE(1)=GE*M*A*COS(PHI1)+CV*A*Y2*COS(PHI1)-CV*A**2*SIN(PHI2)*
     *      COS(PHI1)-CV*A**2*SIN(PHI1)*COS(PHI1)-CT*PHI1

      QE(2)=-2.*CV*A**2*SIN(PHI2)*COS(PHI2)-CV*A**2*SIN(PHI1)*
     *      COS(PHI2)+CV*A**2*SIN(PHI3)*COS(PHI2)-CT*PHI2

      QE(3)=GE*M*A*COS(PHI3)+CV*A*Y2*COS(PHI3)+CV*A**2*SIN(PHI2)*
     *      COS(PHI3)-CV*A**2*SIN(PHI3)*COS(PHI3)-CT*PHI3

      QE(4)=-3.*GE*M-F-3.*CV*Y2+CV*A*SIN(PHI1)+CV*A*SIN(PHI3)
```

a) Formulieren Sie diese Bewegungsgleichung mit den Bezeichnungen aus Aufgabe 3 in einer möglichst kompakten Form, indem Sie gemeinsame Faktoren ausklammern und die Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \cos\alpha\ \sin\beta\ ,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$$

der Trigonometrie verwenden:

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \ddot{y}$$

$$+ \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

b) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für $\varphi_i \ll 1$.

$$\begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \ddot{y}$$

$$+ \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Wie berechnet sich allgemein die Gleichgewichtslage $\mathbf{y} = \mathbf{y}_0 = const.$ für eine Bewegungsgleichung $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{K}\mathbf{y} = \mathbf{h} = const.$?

$y_0 =$ ____________________

d) Welche Gleichgewichtslage der Wippe ergibt sich für $F = 0$ und entsprechende Zahlenwerte für die Systemparameter?

☐ $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0025 \end{bmatrix}$ ☐ $y = \begin{bmatrix} -0.0078 \\ 0 \\ -0.0078 \\ -0.0104 \end{bmatrix}$

e) Welche Gleichgewichtslage der Wippe ergibt sich für $F > 0$ und entsprechende Zahlenwerte für die Systemparameter?

☐ $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0025 \end{bmatrix}$ ☐ $y = \begin{bmatrix} -0.0078 \\ 0 \\ -0.0078 \\ -0.0104 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Als nächstes sollen die Eigenschwingungen des linearisierten Systems aus Aufgabe 4b bestimmt werden.

a) Aus welchen Gleichungen ergeben sich im vorliegenden Fall Informationen zu den Eigenschwingungen?

☐ $\left(-\boldsymbol{M}\omega^2+\boldsymbol{K}\right)\boldsymbol{y}=\boldsymbol{h}$ ☐ $\det\left(\boldsymbol{M}\omega^2+\boldsymbol{K}\right)=0$

☐ $\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=0$ ☐ $\det\begin{bmatrix}\lambda\boldsymbol{E} & -\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{K} & \lambda\boldsymbol{E}\end{bmatrix}=0$

b) Mit entsprechenden Zahlenwerten findet man für die Wippe z.B. folgende Eigenfrequenzen ω_i und Eigenvektoren $\hat{\mathbf{y}}_i$. Wie groß sind die zugehörigen Schwingungsfrequenzen?

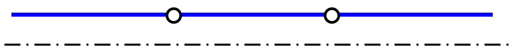
$\omega_1=17.32$ rad/s $\hat{\mathbf{y}}_1=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^T$ $f_1=$ ______ Hz

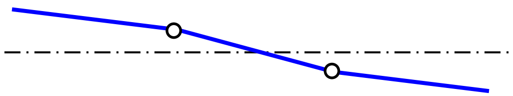
$\omega_2=46.37$ rad/s $\hat{\mathbf{y}}_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 2/3\end{bmatrix}^T$ $f_2=$ ______ Hz

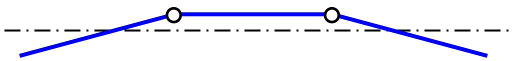
$\omega_3=60.25$ rad/s $\hat{\mathbf{y}}_3=\begin{bmatrix}-1/2 & -1 & 1/2 & 0\end{bmatrix}^T$ $f_3=$ ______ Hz

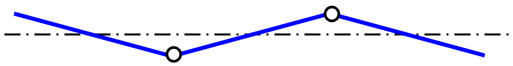
$\omega_4=63.25$ rad/s $\hat{\mathbf{y}}_4=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$ $f_4=$ ______ Hz

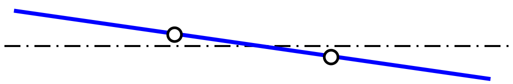
c) Ordnen Sie folgende Schwingungsformen den Eigenschwingungen zu:


☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ keine


☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ keine

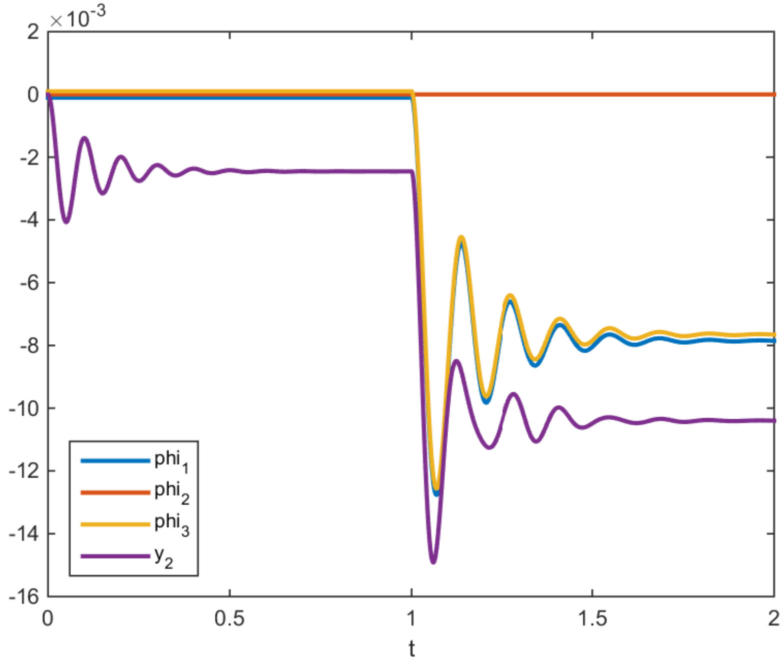

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ keine


☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ keine


☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ keine

Aufgabe 6 (2 Punkte)

Ergänzt man in Aufgabe 4b zusätzlich Dämpfung in den Spiralfedern und lässt die konstante Kraft F erst ab dem Zeitpunkt $t\geq 1$ wirken, ergeben sich folgende Zeitverläufe:



a) Erklären Sie die auftretende Schwingung für $0\leq t<1$.

____

____

b) Was passiert für $t\geq 1$?

____

____

Aufgabe 7 (11 Punkte)

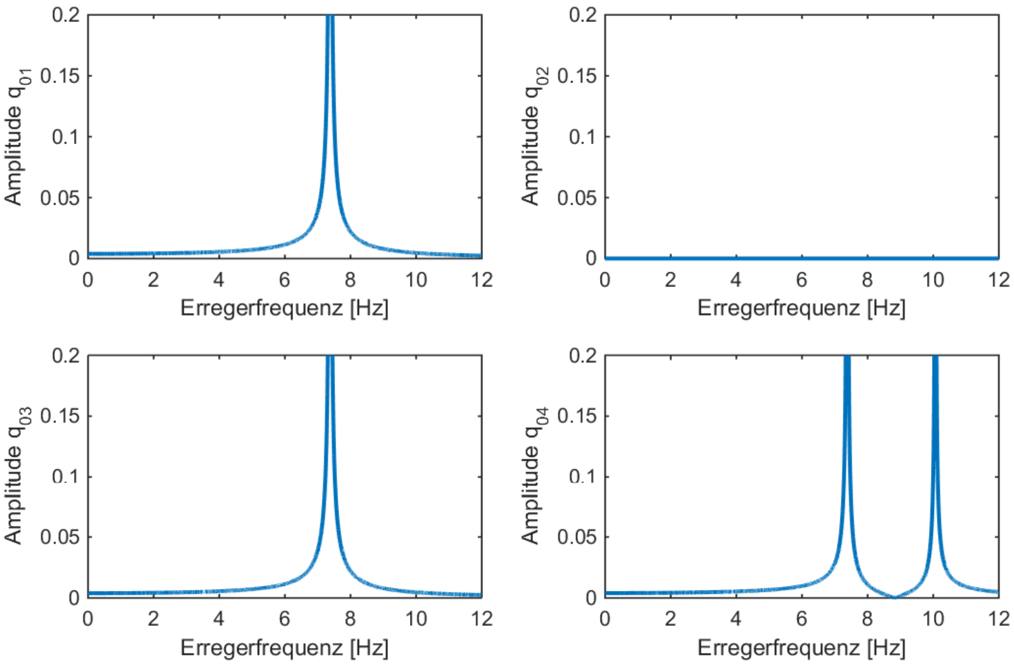
Durch Linearisieren um die Gleichgewichtslage erhält man für eine periodische Kraft $F = F_0 \cos\Omega t$ und entsprechende Zahlenwerte die Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 40 & 30 & 0 & -30 \\ 30 & 70 & -30 & 0 \\ 0 & -30 & 40 & -30 \\ -30 & 0 & -30 & 90 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{y}} + 1000 \begin{bmatrix} 123 & 120 & 0 & -120 \\ 120 & 243 & -120 & 0 \\ 0 & -120 & 123 & -120 \\ -120 & 0 & -120 & 360 \end{bmatrix} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -100 \end{bmatrix} \cos\Omega t \, .$$

a) Wie berechnet sich der Frequenzgang der stationären Lösung $\mathbf{y}_{stationär}(t) = \mathbf{q}_0 e^{i\Omega t} + \bar{\mathbf{q}}_0 e^{-i\Omega t}$?

$$\mathbf{q}_0 = \Big[\qquad\qquad \Big]^{-1} \Big[\qquad \Big]$$

b) Folgendes Bild zeigt die Amplitudenfrequenzgänge der vier verallgemeinerten Koordinaten.



Welche Eigenformen aus Aufgabe 5b werden offensichtlich angeregt? Begründen Sie, warum die anderen Eigenformen nicht angeregt werden.

Eigenform	*angeregt*	*nicht angeregt Begründung*
1	☐	☐ weil …
2	☐	☐ weil …
3	☐	☐ weil …
4	☐	☐ weil …

c) Wie nennt sich das Phänomen, dass bestimmte Eigenformen nicht angeregt werden können?

☐ Resonanzerscheinung ☐ strenge Resonanz

☐ Scheinresonanz ☐ Tilgung

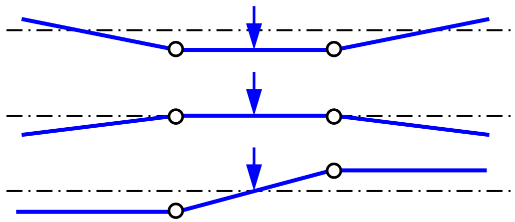
d) Welches Phänomen tritt bei der Erregerfrequenz $8.8\ \mathrm{Hz}$ auf?

☐ Resonanzerscheinung ☐ strenge Resonanz

☐ Scheinresonanz ☐ Tilgung

In welcher Form schwingt das System dabei?

☐
☐
☐



e) Warum verschwindet der Frequenzgang von φ_2 völlig?

____

ENDE