Prüfung
Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 120 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Ein Trägheitstensor besteht aus Massenträgheitsmomenten und Massendeviationsmomenten.

a) Beschreiben Sie jeweils verbal den physikalischen Effekt der beiden Größen.

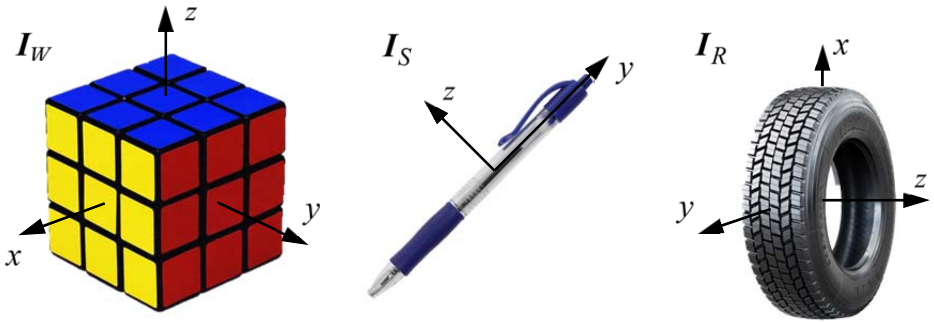
Massenträgheitsmoment: _

Massendeviationsmoment: _

b) Ordnen Sie die Trägheitstensoren $\boldsymbol{I}_W$, $\boldsymbol{I}_S$ und $\boldsymbol{I}_R$ von Würfel, Stift und Reifen den folgenden Matrizen zu:

$$\_\_\_ = \begin{bmatrix} 1630 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1630 \end{bmatrix} ma^2, \quad \_\_\_ = \begin{bmatrix} 5272 & 0 & 0 \\ 0 & 5272 & 0 \\ 0 & 0 & 8894 \end{bmatrix} ma^2$$

$$\_\_\_ = \begin{bmatrix} 129 & 0 & 0 \\ 0 & 51 & 0 \\ 0 & 0 & 51 \end{bmatrix} ma^2, \quad \_\_\_ = \begin{bmatrix} 5956 & 0 & 0 \\ 0 & 5956 & 0 \\ 0 & 0 & 5956 \end{bmatrix} ma^2$$

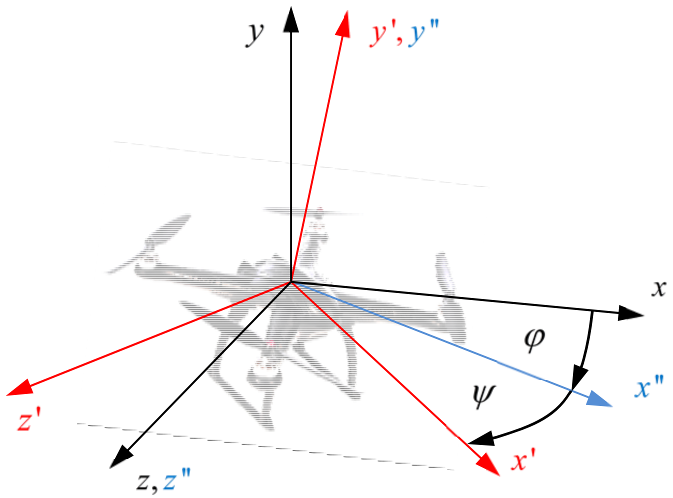


c) Eine der Matrizen in Teilaufgabe b) konnte nicht zugeordnet werden. Begründen Sie, warum diese Matrix kein Trägheitstensor eines real existierenden Körpers sein kann.

_ _

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Die Drehbewegung einer Drohne mit dem körperfesten Koordinatensystem $K'\{x', y', z'\}$ wird durch die beiden Winkel φ und ψ relativ zum Inertialsystem $K\{x, y, z\}$ beschrieben.



a) Welche Elementardrehungen beschreiben die Rotation des körperfesten Koordinatensystems K' gegenüber dem Inertialsystem K?

	Drehachse	*Winkel*
1. Drehung $K \rightarrow K''$	☐ x ☐ y ☐ z	
2. Drehung $K'' \rightarrow K'$	☐ x ☐ y ☐ z	

b) Wie berechnet sich die Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}$ für eine Koordinatentransformation von K' nach K aus Elementardrehmatrizen?

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit der Drohne im Inertialsystem K an.

$$\boldsymbol{\omega}_K = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

d) Wie transformiert sich der Winkelgeschwindigkeitsvektor vom Koordinatensystem K nach K'?

☐ $\boldsymbol{\omega}_{K'} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}_K$ ☐ $\boldsymbol{\omega}_{K'} = \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{\omega}_K$

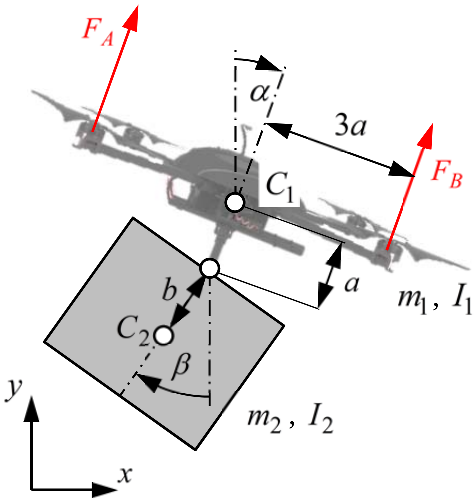
☐ $\boldsymbol{\omega}_{K'} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\omega}_K\boldsymbol{S}^T$ ☐ $\boldsymbol{\omega}_{K'} = \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{\omega}_K\boldsymbol{S}$

e) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit der Drohne im körperfesten System K' an.

$$\boldsymbol{\omega}_{K'} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (23 Punkte)

Ein Paket (Masse m_2, Hauptträgheitsmoment I_2 bzgl. Schwerpunkt C_2) wird mit einer Drohne (Masse m_1, Hauptträgheitsmoment I_1 bzgl. Schwerpunkt $C_1(x_1, y_1, 0)$) befördert. Das Paket ist im Abstand a gelenkig unter der Drohne befestigt. Das Flugmanöver soll in der x, y-Ebene untersucht werden, die Steuerung der Drohne erfolgt über die Auftriebskräfte F_A und F_B.



a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Mehrkörpersystems?

☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \alpha \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} F_A \\ y_1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} F_A \\ F_B \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

b) Geben Sie Ortsvektor und Drehmatrix der Drohne an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie den Ortsvektor und die Drehmatrix des Pakets an.

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Bestimmen Sie Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

Drohne:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{J}_{T_1} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{J}_{R_1} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}.$$

Paket:

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{J}_{T_2} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{J}_{R_2} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}.$$

e) Beschreiben Sie die eingeprägten Kräfte und Momente auf Drohne und Paket.

$$\boldsymbol{f}_1^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_1^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix},$$

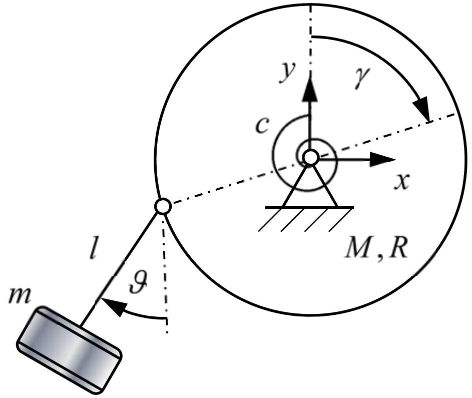
$$\boldsymbol{f}_2^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}.$$

f) Vervollständigen Sie die Newton-Euler'schen Gleichungen.

$$\begin{bmatrix} \\ \hdashline \\ \hdashline \\ \hdashline \\ \end{bmatrix} \ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \\ \hdashline \\ \hdashline \\ \hdashline \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1^e \\ \hdashline \boldsymbol{f}_2^e \\ \hdashline \boldsymbol{l}_1^e \\ \hdashline \boldsymbol{l}_2^e \end{bmatrix} + \bar{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{g}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Ein Schwingungssystem besteht aus einer homogenen Scheibe (Radius R, Masse M) und einem Punktpendel (Masse m, Pendellänge l). Auf die Scheibe wirkt aufgrund einer Torsionsfeder (Torsionssteifigkeit c) ein Rückstellmoment.



Für das System ergibt sich die nichtlineare Bewegungsgleichung $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}$ mit dem Lagevektor $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}\gamma & \vartheta\end{bmatrix}^T$ und folgenden Matrizen:

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} R^2\left(\frac{M}{2}+m\right) & mRl(\cos\gamma\cos\vartheta+\sin\gamma\sin\vartheta) \\ mRl(\cos\gamma\cos\vartheta+\sin\gamma\sin\vartheta) & ml^2 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{k} = \begin{bmatrix} mRl\dot{\vartheta}^2(\sin\gamma\cos\vartheta-\cos\gamma\sin\vartheta) \\ mRl\dot{\gamma}^2(\cos\gamma\sin\vartheta-\sin\gamma\cos\vartheta) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} -c\gamma - mgR\sin\gamma \\ -mgl\sin\vartheta \end{bmatrix}.$$

Die Bewegungsgleichung soll um die Gleichgewichtslage $\boldsymbol{y}_s = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^T$ für kleine Winkel $\gamma, \vartheta \ll 1$ linearisiert werden.

a) Wie lauten die linearisierten Beziehungen für folgende Terme?

$\sin\gamma \approx$ ________, $\sin\vartheta \approx$ ________,

$\cos\gamma\cos\vartheta \approx$ ________, $\sin\gamma\sin\vartheta \approx$ ________,

$\sin\gamma\cos\vartheta \approx$ ________, $\cos\gamma\sin\vartheta \approx$ ________,

$\dot{\vartheta}^2\cos\gamma\sin\vartheta \approx$ ________, $\dot{\gamma}^2\sin\gamma\cos\vartheta \approx$ ________.

b) Wie lautet die linearisierte Bewegungsgleichung?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Die Zustandsgleichung eines Systems lautet $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 0 & 0 \\ 2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

a) Wie bestimmen sich die Eigenschwingungen $\boldsymbol{x}(t) = \tilde{\boldsymbol{x}} e^{\lambda t}$ des Systems?

☐ $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ☐ $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\tilde{\mathbf{x}} + (\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}) = \mathbf{0}$

☐ $(\lambda\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ ☐ $(\lambda\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$

b) Stellen Sie die Entwicklung der Determinante zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms nach der ersten Zeile dar.

$$p(\lambda) = \_\_\_ \det\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} + \_\_\_ \det\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Wie lautet die charakteristische Gleichung des Systems?

____

d) Berechnen Sie die Eigenwerte und geben Sie den Lösungsweg an:

$\lambda_1 = i$, $\lambda_2 =$ _____, $\lambda_3 =$ _____, $\lambda_4 =$ _____.

e) Wie lautet das Gleichungssystem zur Bestimmung des Eigenvektors $\tilde{\boldsymbol{x}}_1$ zum Eigenwert $\lambda_1 = i$?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

f) Bestimmen Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = i$.

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & \_\_\_\_\_\_ & 1 \end{bmatrix}^T$$

g) Welche Modalmatrix könnte dem System zugeordnet werden?

☐ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 2i & 2i & i & i \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ i & i & i & i \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2i & 2i & i & -i \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -i & i & -i & i \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

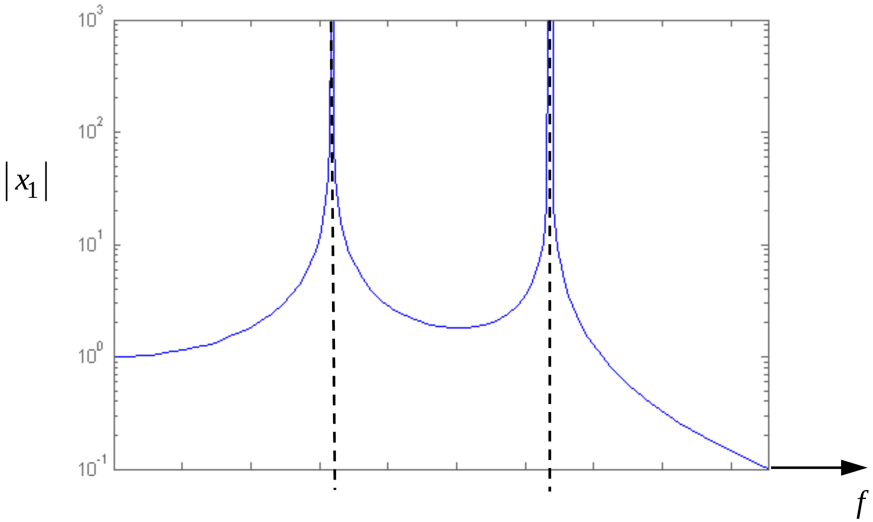
☐ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2i & 2i & i & -i \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -i & i & -i & i \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} -2i & 2i & i & -i \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ -i & i & -i & i \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

h) Welches Schwingungsverhalten ist zu erwarten?

☐ stark gedämpft ☐ schwach gedämpft

☐ ungedämpft ☐ aperiodisches Abklingverhalten

i) Im folgenden Bild ist der Amplitudengang von x_1 dargestellt. Geben Sie Werte zu den markierten Frequenzen an.



_ _ _ _ Hz   _ _ _ _ Hz

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Welche Stabilitätseigenschaften kann man folgenden Informationen entnehmen?

	asymptotisch stabil	*grenzstabil*	*instabil*	*keine Aussage möglich*
$\lambda_{1,2}=2 \;,\; \lambda_{3,4}=\pm 2i$				
$\lambda_1=0 \;,\; d_1=1$				
$\lambda_{1,2}=0 \;,\; d_{1,2}=2$				
$\lambda_1=-2 \;,\; \lambda_2=-2 \;,\; \lambda_{3,4}=-2\pm i$				
$\lambda_{1,2}=\pm i \;,\; \lambda_{3,4}=\pm 5i$				
$\lambda_{1,2}=\pm 0.5 \;,\; \lambda_{3,4}=-1\pm i$				
$p(\lambda)=(\lambda+1)(\lambda^2+4\lambda+5)$				
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 37 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$				
$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$				

ENDE