Prüfung
Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

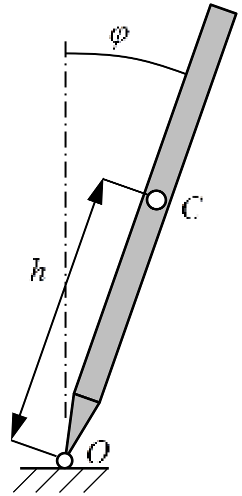
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 120 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Punkte	Note	

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Aufgabe 1 (9 Punkte)



Der fallende Stab (Masse m, Trägheitsmoment I_O bez. Aufstandspunkt O, Schwerpunkthöhe h) wird durch die nichtlineare Bewegungsgleichung

$$I_O\ddot{\varphi} = mgh\sin\varphi$$

beschrieben.

a) Wie lautet für $\varphi \ll 1$ die linearisierte Zustandsform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$?

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) Für den homogenen Stab findet man mit geeigneten Abmessungen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechnen Sie folgende Potenzen:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die Reihenentwicklung der Fundamentalmatrix bis zur dritten Ordnung an.

$$\Phi(t) \approx \underset{(Formel)}{\rule{8cm}{0.4pt}}$$

$$= \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Die Drehung eines Körpers im Raum wird durch die Drehmatrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\frac{4}{5}\sin\varphi & \frac{3}{5}\sin\varphi \\ \frac{4}{5}\sin\varphi & \frac{9}{25}+\frac{16}{25}\cos\varphi & \frac{12}{25}(1-\cos\varphi) \\ -\frac{3}{5}\sin\varphi & \frac{12}{25}(1-\cos\varphi) & \frac{16}{25}+\frac{9}{25}\cos\varphi \end{bmatrix}$$

mit dem zeitveränderlichen Winkel $\varphi(t)$ beschrieben.

a) Bilden $\dot{\mathbf{S}}$ und $\mathbf{S}^T$.

$$\dot{\boldsymbol{S}} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^T = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie $\dot{\mathbf{S}}\mathbf{S}^T$.

$$\dot{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{S}^T = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Welche Winkelgeschwindigkeit ergibt sich daraus für den Körper?

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

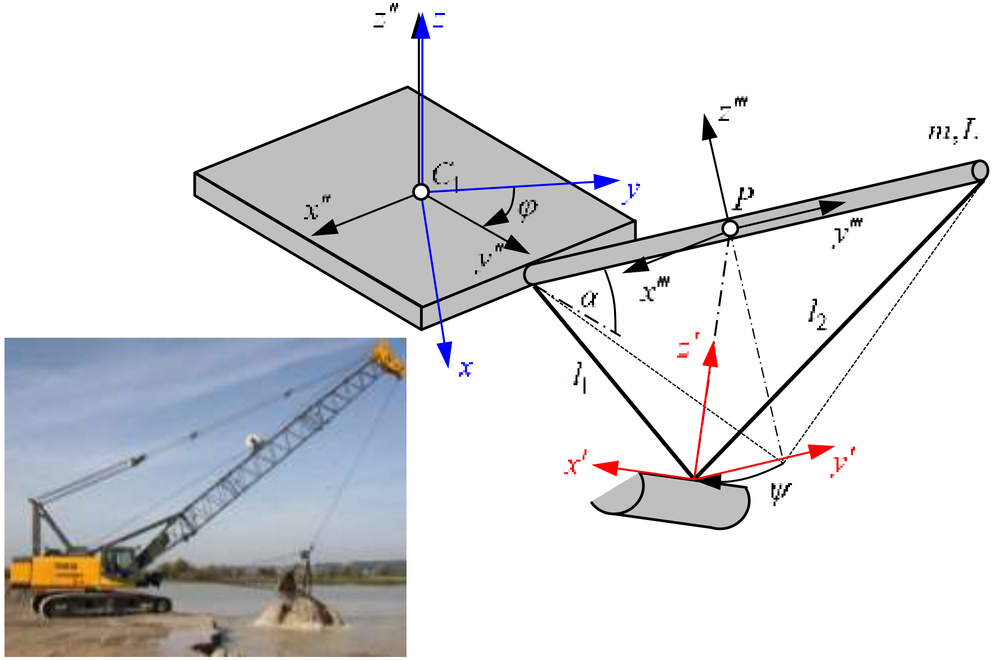
d) Beschreiben Sie die Körperdrehung anschaulich verbal.

____

____

Aufgabe 3 (14 Punkte)

Ein Seilbagger besteht aus einem Grundkörper, der sich mit dem Winkel $\varphi(t)$ um die vertikale z–Achse dreht, einem Ausleger mit dem konstanten Neigungswinkel α gegenüber der Horizontalen und der Baggerschaufel, die an zwei Seilen mit konstant gehaltenen Längen l_1, l_2 am Ausleger hängt. Dadurch kann sie mit dem Winkel $\psi(t)$ um die Auslegerachse schwingen.



a) Welche Elementardrehungen werden benötigt, um die Rotation des Schaufel-festen Koordinatensystems $K'\{x', y', z'\}$ gegenüber dem Inertialsystem $K\{x, y, z\}$ zu beschreiben?

	Drehachse	*Winkel*
1. Drehung $K \to K''$	☐ x ☐ y ☐ z	
2. Drehung $K'' \to K'''$	☐ x ☐ y ☐ z	
3. Drehung $K''' \to K'$	☐ x ☐ y ☐ z	

b) Wie berechnet sich die Transformationsmatrix für eine Koordinatentransformation von $K'\{x', y', z'\}$ nach $K\{x, y, z\}$ aus den Elementardrehmatrizen?

$$\boldsymbol{S} = \left[\quad\right]\left[\quad\right]\left[\quad\right]$$

c) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit der Baggerschaufel im Zwischenkoordinatensystem $K''\{x'', y'', z''\}$ an.

$$\boldsymbol{\omega}_{K''} = \left[\quad\right]$$

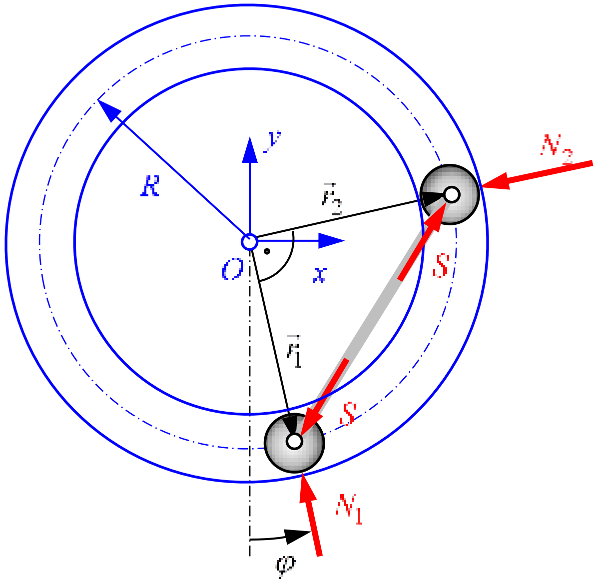
d) Geben Sie den Trägheitstensor des homogenen Auslegers (dünner Stab mit Masse m, Länge L) im Ausleger-festen Koordinatensystem $K'''\{x''', y''', z'''\}$ an und transformieren Sie ihn in das Grundkörper-feste Koordinatensystem $K''\{x'', y'', z''\}$.

$$\boldsymbol{I}_{K'''} = \left[\quad\right]$$

$$\to \boldsymbol{I}_{K''} = \underset{(Formel)}{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} = \_\_\_\_\left[\quad\right]$$

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Zwei Massenpunkte (jeweils Masse m) gleiten reibungsfrei in einer feststehenden kreisförmigen Nut (Radius R) und sind durch einen masselosen Stab so miteinander verbunden, dass ihre jeweiligen Verbindungen mit dem Kreismittelpunkt senkrecht zueinander sind. Durch die Kontakte mit dem Nutrand entstehen Normalkräfte N_1 und N_2, im Verbindungsstab die Stabkraft S.



a) Stellen Sie die Ortsvektoren zu den beiden Massenpunkten im Inertialsystem dar und bilden Sie die Variationen bez. des Freiheitsgrads φ.

$$\boldsymbol{r}_1 = \left[\quad\right] \rightarrow \delta\boldsymbol{r}_1 = \left[\quad\right]$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \left[\quad\right] \rightarrow \delta\boldsymbol{r}_2 = \left[\quad\right]$$

b) Bestimmen Sie den Differenzvektor $\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ und einen zugehörigen Einsvektor $\vec{e}_{12}$ entlang des Verbindungsstabs.

$$\boldsymbol{r}_{12} = \left[\quad\right], \quad \boldsymbol{e}_{12} = \left[\quad\right]$$

c) Beschreiben Sie die Reaktionskräfte auf die beiden Massenpunkte im Inertialsystem.

$$\boldsymbol{f}_1^r = \left[\quad\right], \quad \boldsymbol{f}_2^r = \left[\quad\right]$$

d) Berechnen Sie die virtuelle Arbeit aller Reaktionskräfte.

$\delta\boldsymbol{r}_1^T \boldsymbol{f}_1^r =$ _____________

$\delta\boldsymbol{r}_2^T \boldsymbol{f}_2^r =$ _____________

$\rightarrow \delta W^r =$ _____________

e) Welche eingeprägten Kräfte wirken auf das System?

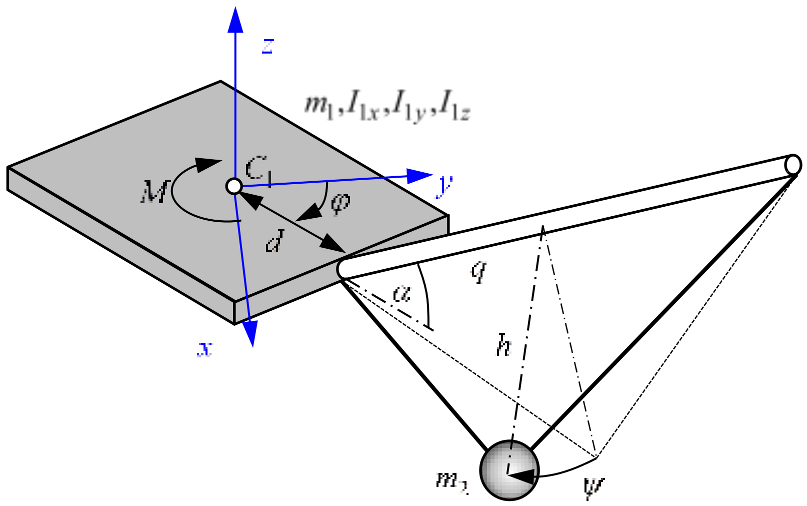
$$\boldsymbol{f}_1^e = \left[\quad\right], \quad \boldsymbol{f}_2^e = \left[\quad\right]$$

f) Berechnen Sie deren virtuelle Arbeit.

$\delta W^e =$ _________________________

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Der Seilbagger aus Aufgabe 3 soll nun als Mehrkörpersystem modelliert werden. Zur Vereinfachung wird die Masse des Auslegers (Anstellwinkel $\alpha = const.$) vernachlässigt und die Baggerschaufel als Massenpunkt (Masse m_2) modelliert. Der Grundkörper (Masse m_1, Hauptträgheitsmomente I_{1x}, I_{1y}, I_{1z}) wird durch das Moment M um die vertikale Achse angetrieben.



Damit ergeben sich für die beiden verbleibenden Körper folgende Ortsvektoren und Drehmatrix:

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{S}_1 = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \left(d + q\cos\alpha + h\cos\psi\sin\alpha\right)\sin\varphi + h\sin\psi\cos\varphi \\ \left(d + q\cos\alpha + h\cos\psi\sin\alpha\right)\cos\varphi - h\sin\psi\sin\varphi \\ q\sin\alpha - h\cos\psi\cos\alpha \end{bmatrix}$$

a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Systems?

☐ $\boldsymbol{y} = [\varphi]$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \alpha \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} \varphi \\ \psi \\ \alpha \end{bmatrix}$

b) Bestimmen Sie die zugehörigen Geschwindigkeiten und Winkelgeschwindigkeiten der beiden Körper.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c) Welche eingeprägten Kräfte und Momente wirken auf das System?

$$\boldsymbol{f}_1^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_1^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{f}_2^e = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

d) Mit Neweul findet man für die Bewegungsgleichungen folgendes Ergebnis:

```
C> Massenmatrix
      M(1,1)=I1Z+M2*D**2+2.*M2*Q*D*COS(AL)+2.*M2*H*D*SIN(AL)*
     *        COS(PSI)+M2*Q**2*COS(AL)**2+2.*M2*H*Q*SIN(AL)*
     *        COS(AL)*COS(PSI)+M2*H**2*SIN(AL)**2*COS(PSI)**2+
     +        M2*H**2*SIN(PSI)**2
      M(2,1)=M2*H*D*COS(PSI)+M2*H*Q*COS(AL)*COS(PSI)+M2*H**2*
     *        SIN(AL)
      M(2,2)=M2*H**2
C> Verallgemeinerte Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskraefte
      K(1)=-M2*H*D*PSIP**2*SIN(PSI)-2.*M2*H*D*PSIP*PHIP*SIN(AL)*
     *      SIN(PSI)-M2*H*Q*PSIP**2*SIN(PSI)*COS(AL)-2.*M2*H*
     *      Q*PSIP*PHIP*SIN(AL)*SIN(PSI)*COS(AL)-2.*M2*H**2*PSIP*
     *      PHIP*SIN(AL)**2*SIN(PSI)*COS(PSI)+2.*M2*H**2*PSIP*
     *      PHIP*SIN(PSI)*COS(PSI)
      K(2)=-M2*H**2*PHIP**2*SIN(PSI)*COS(PSI)+M2*H*D*PHIP**2*
     *      SIN(AL)*SIN(PSI)+M2*H*Q*PHIP**2*SIN(AL)*SIN(PSI)*
     *      COS(AL)+M2*H**2*PHIP**2*SIN(AL)**2*SIN(PSI)*COS(PSI)
C> Verallgemeinerte eingepraegte Kraefte
      QE(1)=M
      QE(2)=-G*M2*H*SIN(PSI)*COS(AL)
```

Formulieren Sie diese Bewegungsgleichungen in Standardform unter Verwendung der Bezeichnungen in der obigen Skizze.

$$\left[\quad\right]\left[\quad\right] + \left[\quad\right] = \left[\quad\right]$$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Welche Schwingungserscheinungen können bei harmonischer Erregung folgender Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}_0 \cos \Omega_E t$ mit den Eigenwerten λ_i auftreten bzw. treten auf? Stellen Sie für System d) benötigte Zwischenrechnungen dar.

	Systemeigenschaft	Erregerfrequenz	strenge Resonanz	Scheinresonanz	Tilgung
a)	$\lambda_{1,2} = -3,\ \ \lambda_{3,4} = \pm 4i$	$\Omega_E = 3$	☐	☐	☐
b)	$\lambda_{1,2} = -3,\ \ \lambda_{3,4} = \pm 4i$	$\Omega_E = 4$	☐	☐	☐
c)	$\lambda_{1,2} = -3 \pm 5i,\ \ \lambda_{3,4} = \pm 4i$	$\Omega_E = 5$	☐	☐	☐
d)	$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{b}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\Omega_E = 2$	☐	☐	☐

Zwischenrechnungen zu System d)

$$\det\left(i\Omega_E \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right) = \det\left[\quad\right] = \_\_\_\_$$

$$adj\left(i\Omega_E \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}\right) \boldsymbol{b}_0 = \left[\quad\right]\left[\quad\right] = \left[\quad\right]$$

ENDE