Prüfung
Maschinen- und Fahrzeugdynamik

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner; keine Mobiltelefone!
6. Bearbeitungszeit: 2h
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

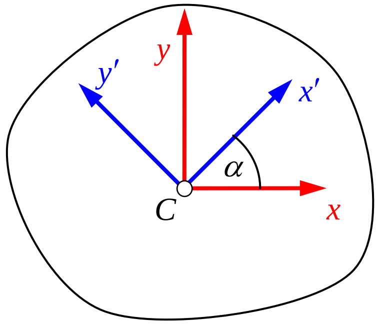
....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (19 Punkte)

Der Trägheitstensor eines Körpers im körperfesten Koordinatensystem $K'\{C, x', y', z'\}$ sei



$$\boldsymbol{I}' = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Determinante, charakteristisches Polynom und Hauptträgheitsmomente von $\boldsymbol{I}'$.

$\det \boldsymbol{I}' =$ ____

$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{I}') =$ ______________________________

$\Rightarrow \lambda_1 =$ ____, $\lambda_2 =$ ____, $\lambda_3 =$ ____

b) Wie transformiert sich $\boldsymbol{I}'$ mit der Drehmatrix

$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ins Inertialsystem $K\{C, x, y, z\}$?

☐ $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{I}'$ ☐ $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}'\boldsymbol{S}$ ☐ $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}^T\boldsymbol{I}'\boldsymbol{S}$ ☐ $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{I}'\boldsymbol{S}^T$

c) Führen Sie die Koordinatentransformation für $\alpha = 45°$ durch.
(Hinweis: $\sin 45° = \cos 45° = 1/\sqrt{2}$)

$$\boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Berechnen Sie Determinante, charakteristisches Polynom und Hauptträgheitsmomente von $\boldsymbol{I}$.

$\det \boldsymbol{I} =$ ____

$\det(\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{I}) =$ ________________________________

$\Rightarrow \lambda_1 =$ ____, $\lambda_2 =$ ____, $\lambda_3 =$ ____

e) Welche Eigenschaften bzw. Größen bleiben bei der Koordinatentransformation erhalten bzw. sind invariant?

☐ Symmetrie ☐ Determinante ☐ Eigenwerte

f) Skizzieren Sie jeweils einen allgemeinen Beweis für jede dieser Invarianzen bei einer Koordinatentransformation mit einer allgemeinen orthogonalen Drehmatrix $\boldsymbol{S}$. (Hinweis: $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}^T = \boldsymbol{E}$, $\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$)

____

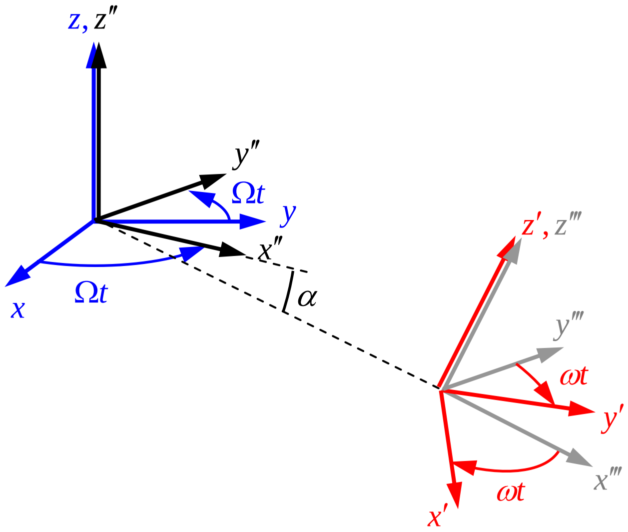
____

____

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Ein typischer Freizeitsport in chinesischen Parks ist das Training mit dem asymmetrischen Diabolo (in China asymmetrisches Jojo genannt). Dabei wird ein Kreisel (im Bild rot) in ein Band eingehängt und wie ein Hula-Hoop-Reifen um den Körper geschleudert, wobei der Kreisel auf dem Band abrollt und dadurch in Rotation versetzt wird, die ihn stabilisiert.

Im stationären Zustand dreht sich das Band um die vertikale Körperachse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω und ist dabei aufgrund der Schwerkraft um den konstanten Winkel α nach unten geneigt. Durch die Abrollbewegung dreht sich der Kreisel entgegengesetzt um seine Symmetrieachse senkrecht zur Bandebene mit der ebenfalls konstanten Winkelgeschwindigkeit ω.



a) Welche Elementardrehungen werden benötigt, um die Rotation des Kreisel-festen Koordinatensystems $K'\{x', y', z'\}$ gegenüber dem Inertialsystem $K\{x, y, z\}$ zu beschreiben?

	Drehachse	*Winkel*
1. Drehung $K \to K''$	☐ x ☐ y ☐ z	
2. Drehung $K'' \to K'''$	☐ x ☐ y ☐ z	
3. Drehung $K''' \to K'$	☐ x ☐ y ☐ z	

b) Wie berechnet sich die Transformationsmatrix aus den Elementarmatrizen für eine Koordinatentransformation von $K'\{x', y', z'\}$ nach $K\{x, y, z\}$?

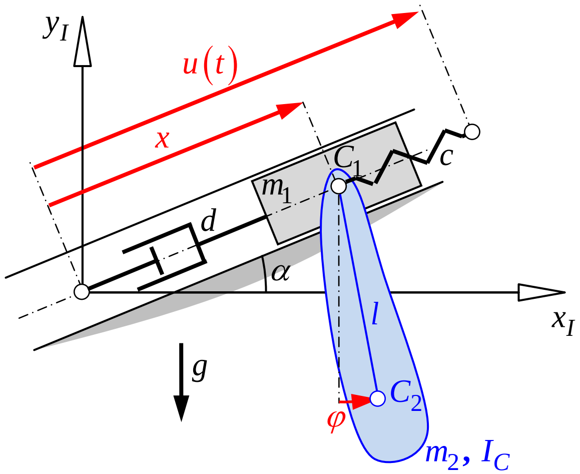
$$\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

c) Geben Sie die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels im Zwischenkoordinatensystem $K''\{x'', y'', z''\}$ an.

$$\boldsymbol{\omega}_{K''} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Ein Pendelsystem besteht aus einem Kulissenstein (Masse m_1), der in einer geneigten Schiene (Neigungswinkel $\alpha = konst.$) geführt ist, und einem angehängten Körperpendel (Masse m_2, Trägheitsmoment I_C bezüglich Schwerpunkt C_2, Pendellänge l). Der Kulissenstein wird über eine Feder (Steifigkeit c, ungespannte Federlänge Null) durch die Fußpunkterregung $u(t)$ angeregt und den Dämpfer (Dampfungskoeffizient d) gebremst.



a) Welcher Lagevektor eignet sich zur Beschreibung des Mehrkörpersystems?

☐ $\boldsymbol{y} = [x]$ ☐ $\boldsymbol{y} = [u]$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix}$

b) Geben Sie die Ortsvektoren zu Kulissen- und Pendelschwerpunkt sowie die Drehmatrix des Pendels an.

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{S}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

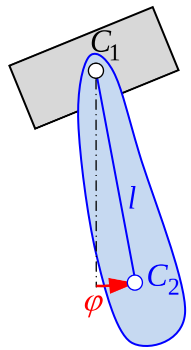
c) Bestimmen Sie die zugehörigen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen.

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_1 = \boldsymbol{J}_{T1}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \boldsymbol{J}_{T2}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}\dot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{J}_{R2}\ddot{\boldsymbol{y}} + \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

d) Zeichnen Sie alle eingeprägten Kräfte auf das rechts freigeschnittene Pendelsystem ein und beschreiben Sie die resultierenden Kraftwinder bzgl. der jeweiligen Körperschwerpunkte.



$$\boldsymbol{f}_1^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{f}_2^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{l}_2^e = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Mit Neweul findet man für das Pendelsystem in Aufgabe 3 folgendes Ergebnis:

```
C>   Massenmatrix
      M(1,1)=M1+M2
C
      M(2,1)=M2*L*COS(AL)*COS(PHI)+M2*L*SIN(AL)*SIN(PHI)
      M(2,2)=IC+M2*L**2
C
C>   Verallgem. Kreisel-, Zentrifugal- und Corioliskraefte
      K(1)=-M2*L*PHIP**2*SIN(PHI)*COS(AL)+M2*L*PHIP**2*SIN(AL)*
     *     COS(PHI)
      K(2)=0.
C>
C>   Verallgemeinerte eingepraegte Kraefte
      QE(1)=-GE*M1*SIN(AL)-GE*M2*SIN(AL)+C*U-C*X-D*XP
      QE(2)=-GE*M2*L*SIN(PHI)
```

a) Formulieren Sie die Bewegungsgleichungen in Standardform unter Verwendung der Bezeichnungen in Aufgabe 3. (Hinweis: GE $\hat{=}\, g$)

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b) Wie lauten die linearisierten Bewegungsgleichungen für $\varphi \ll 1$?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Mit entsprechenden Zahlenwerten und $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$ ergibt sich für die linearisierten Pendelgleichungen aus Aufgabe 4 ohne Erregung

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

a) Wie lautet die Zustandsform $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$?

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet das charakteristische Polynom zur Berechnung der Eigenwerte für die freien Schwingungen?

$$\lambda^4 + \_\_\_\_\,\lambda^3 + \_\_\_\_\,\lambda^2 + \_\_\_\_\,\lambda + \_\_\_\_ = 0$$

c) Für die Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1,2} = -0.95 \pm 3.45i, \quad \lambda_{3,4} = -0.55 \pm 1.68i\,.$$

Auf welche Eigenschaften des Systems kann man daraus schließen?

- ☐ System stabil
- ☐ System instabil
- ☐ System schwingungsfähig
- ☐ System nicht schwingungsfähig
- ☐ strenge Resonanz möglich
- ☐ nur Resonanzerscheinung möglich
- ☐ keine Resonanz möglich

d) Welche Eigenfrequenzen hat das System?

$f_1 =$ ________ Hz , $f_2 =$ ________ Hz

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Mit harmonischer Erregung $u(t) = u_0 \cos \Omega_E t$ und entsprechenden Zahlenwerten ergibt sich für die linearisierten Pendelgleichungen aus Aufgabe 4

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 20 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\,u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos \Omega_E t \,.$$

Die Bedingung für Tilgung des ersten Freiheitsgrads lautet allgemein

$$adj\left[-\Omega_E^2 \mathbf{M} + i\Omega_E\left(\mathbf{D}+\mathbf{G}\right) + \left(\mathbf{K}+\mathbf{N}\right)\right]\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix}, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

a) Wie lautet diese Bedingung speziell für das Pendelsystem zur Tilgung des Kulissensteins?

$$\begin{bmatrix} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \\ \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ c \end{bmatrix}$$

b) Welche Einzelgleichungen ergeben sich daraus?

____

____

c) Bei welcher Erregerfrequenz bewegt sich der Kulissenstein trotz Erregung nicht?

$\Omega_E =$ ___________

ENDE