

Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 9

Besprechung in KW 2 / Abgabe in KW 3

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:

- Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
 - Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
 - Aufgaben 23 und 24

Aufgabe 1

Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2

Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3

Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4

Konstruieren Sie Turing-Maschinen, die die folgenden Bandinhalte in der angegebenen Weise verändern. Die Turing-Maschinen starten auf dem ersten Non-Blank-Zeichen, und sollen beim Stoppen wiederum auf diesem Feld stehen (Eingabealphabet ist $\{0, 1, a\}$, $n, m \in \mathbb{N}$).

1. $a^n 1 a^m$ nach a^{n-m} , wobei $n-m := \begin{cases} n-m & \text{falls } n \geq m, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
2. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \cdot m}$.
3. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n // m}$, wobei $n // m$ die ganzzahlige Division von n durch m bezeichnet.
4. $a^n 1 a^m$ nach $a^{n \bmod m}$.
5. a^n nach $\text{bin}(n)$, wobei $\text{bin}(n)$ die Binärdarstellung von n ist (niederwertige Bits hinten).
6. $\text{bin}(n)$ nach a^n .
7. $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$ nach $\text{bin}(n+m)$.
8. $\text{bin}(n) \square \text{bin}(m)$ nach $\text{bin}(n \cdot m)$.
9. $\text{bin}(n)$ nach $\text{bin}(n^2)$ überführt.

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 5

Geben Sie Turing-Maschinen an, die für folgende Sprachen jeweils die zugehörige charakteristische Funktion berechnet: (Kommentieren Sie Ihre Programme!)

- $$L_1 = \emptyset$$
- $$L_2 = \{a, b, c\}^*$$
- $$L_3 = \{w \in \{a, b\}^* \mid 2 \text{ teilt } |w|\}$$
- $$L_4 = \{w c \overleftarrow{v} \mid w \in \{a, b\}^*\}$$
- $$L_5 = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$
- $$L_6 = \{w \in \{a, b\}^* \mid abbb \text{ ist nicht Teilwort von } w\}$$
- $$L_7 = \{w c w \mid w \in \{a, b\}^*\}$$
- $$L_8 = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
- $$L_9 = \{w c w c a^n \mid w \in \{a, b\}^* \wedge n \in \mathbb{N} \wedge 3 \cdot |w| = n\}$$

Aufgabe 6

Geben Sie Turing-Maschinen an, die aus einem Bandinhalt der Form $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k$ (beliebige Anzahl nichtleerer Worte, jeweils durch ein Blank (\square) getrennt) die folgenden Bandinhalte erzeugen ($w_1, w_2, \dots, w_k \in \{0, 1\}^+$):

1. $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_k \square w_1$
2. $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k$
3. $w_1 \square w_3 \square w_5 \square \dots \square w_n$ mit $n = \begin{cases} k-1 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ k & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$
4. $w_1 \square w_2 \square w_1 \square w_3 \square w_1 \square w_4 \square \dots \square w_{k-1} \square w_1 \square w_k$
5. $w_1 \square w_2 \square \dots \square w_{k-1} \square w_k \square w_k \square w_{k-1} \square \dots \square w_2 \square w_1$

Kommentieren Sie Ihre Programme!

Aufgabe 7

Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion f berechnet:

$$f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} ww & , \text{ falls } \#_a(w) \text{ nicht durch 4 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 8

Geben Sie eine Turing-Maschinen (mit Kommentierung) an, die folgende Funktion f berechnet:

$$f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* \text{ mit } f(w) = \begin{cases} (babaa)^{2 \cdot \#_b(w)} & , \text{ falls } \#_a(w) \text{ nicht durch 3 teilbar,} \\ \text{undefiniert} & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 9

Geben Sie eine Turing-Maschine M an, die $\text{bin}(n)$ nach $\text{hex}(n)$ überführt, wobei $\text{hex}(n)$ die Hexadezimaldarstellung von n ist (niederwertige Stellen hinten). Geben Sie einen Lauf von M auf dem Wort 11110100101 an. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise und Ihr Programm!

Aufgabe 10

Zeigen Sie: L entscheidbar $\Rightarrow \bar{L}$ entscheidbar

Aufgabe 11

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist entscheidbar.
2. L und \bar{L} sind semi-entscheidbar.
3. Es gibt eine Turingmaschine, die akzeptierend stoppt falls $x \in L$, und verwerfend stoppt, falls $x \notin L$.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare streng-monoton steigende Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
5. Die charakteristische χ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 12

Sei Σ ein Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

1. L ist rekursiv aufzählbar.
2. L ist semi-entscheidbar.
3. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale injektive berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder L ist endlich.
4. $L = \text{Bild}(f)$ für eine totale berechenbare Funktion $f : \{1\}^* \rightarrow \Sigma^*$ oder $L = \emptyset$.
5. $L = \text{Bild}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
6. $L = \text{Def}(f)$ für eine berechenbare Funktion $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$.
7. Die semi-charakteristische φ_L Funktion von L ist berechenbar.

Aufgabe 13

Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Recherchieren Sie gegebenenfalls die Begriffe.

1. Die Menge der abzählbaren Sprachen über Σ ist überabzählbar.
2. Die Menge der aufzählbaren Sprachen über Σ ist abzählbar.
3. Es gibt nicht-aufzählbare Sprachen über Σ .

Aufgabe 14

Seien A_1, \dots, A_n paarweise disjunkte, abzählbare Teilmengen von $\{0, 1\}^*$ und sei A die Vereinigung der Mengen A_1, \dots, A_n . Zeigen Sie: Falls A entscheidbar ist, dann sind auch alle Mengen A_i entscheidbar ($i = 1, \dots, n$).

Aufgabe 15

Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ an.

Aufgabe 16

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren $L := \{wc^i \mid w \in \Sigma^* \wedge i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i \leq |w|\}$. Geben Sie eine Aufzählungsfunktion für L an.

Aufgabe 17

Zeigen Sie:

1. Die entscheidbaren Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt, Komplement und Konkatenation.
 2. Die semi-entscheidbar Sprachen sind abgeschlossen unter Vereinigung, Schnitt und Konkatenation.
-

E schéine Kréschtdag an e glécklecht neit Joer!

Vrolijk Kerstmis en een een Gelukkig Nieuwjaar!

God Jul och Gott Nytt År!

Joyeux Noël et une Bonne Nouvelle Année!

Frohe Weihnachten und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr!
