Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Besprechung in KW 48 / Abgabe in KW 49

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 15

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Wir betrachten die Trägermenge A und binäre Relationen R und S auf A (also $R, S \subseteq A \times A$). Wir definieren die Verknüpfung $\circ$ auf Menge der binären Relationen auf A vermöge $R \circ S := \{(x, y) \mid \exists z \in A : (x, z) \in R \wedge (z, y) \in S\}$. Weiterhin definieren wir $R^0 := \mathrm{id}_A$ sowie $R^{i+1} := R^i \circ R$ für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Schließlich $R^* := \cup_{i \in \mathbb{N} \cup \{0\}} R^i$. Zeigen Sie:

1. Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ auf der Menge der binären Relationen über A.
   [Zusatzfrage: Ist dies von Bedeutung im Hinblick auf die Definition von R^i?]
2. R^* ist reflexiv und transitiv.
3. R^* ist die kleinste reflexiv-transitive Relation, die R umfasst.
4. Ist $\mathcal{R}$ die Menge aller reflexiv-transitive Relationen, die R umfassen, so gilt: $R^* = \cap_{S \in \mathcal{R}} S$.

Aufgabe 5
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie Grammatiken für folgende Sprachen über Σ an

$$\emptyset,\ \{\lambda\},\ \emptyset^*,\ \{\lambda\}^*,\ \{a, b, c\}^*,\ \{a, b\}^+,\ \{a, b, c\},\ \{abc\},\ \{a, b, c\}^3$$

Aufgabe 6
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$L_1 := \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i \neq j\}$$
$$L_2 := \{wcvc\overleftarrow{w} \mid w, v \in \{a, b\}^+\}$$
$$L_3 := \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 7
Wir betrachten das Terminalalphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie kontextfreie Grammatiken für folgende Sprachen L_i an:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^{2n}cb^n \mid n \in \mathbb{N}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aba \text{ oder } bab \text{ ist Teilwort } w\}\\
L_3 &:= \{wv \mid v \in \{c\}^*,\ w \in \{a,b\}^*,\ |w| = |v|\}\\
L_4 &:= \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\}\\
L_5 &:= L_1 \cup L_2\\
L_6 &:= L_3 \cdot L_4
\end{aligned}$$

Aufgabe 8
Geben Sie jeweils rechtslineare Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid w \text{ enthält das Teilwort } bbaab \text{ nicht}\}\\
L_2 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \lor \#_b(w) \bmod 3 = 0\}\\
L_3 &:= \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 3 = 1 \land \#_b(w) \bmod 3 = 0\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 9
Sei $G = (\{S, A, B, C, D, E, F\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit:

$$\begin{aligned}
&P = \{S \to aA \mid bB \mid aS \mid bS\ ,\ A \to aA \mid bA \mid cC\ ,\ B \to aB \mid bB \mid cD\ ,\\
&C \to cC \mid aF\ ,\ D \to cD \mid bF\ ,\ E \to aE \mid bE \mid \lambda\ ,\ F \to E\}
\end{aligned}$$

1. Konstruieren Sie einen finiten Automaten M zur Sprache $L(G)$.
2. Geben Sie für alle Klassen der Relation $\approx_{L(G)}$ jeweils einen die Klasse beschreibenden regulären Ausdruck an.
3. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, der $L(G)$ beschreibt.
4. Konstruieren Sie eine linkslineare Grammatik G' mit $L(G) = L(G')$.

Aufgabe 10
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 11
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

Aufgabe 12
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

Aufgabe 13
Geben Sie jeweils Homomorhismen g und h sowie eine reguläre Sprache R an, so dass die folgenden Beziehungen gelten:

1. $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} = h\Big(\, g^{-1}\big(\, \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}\, \big) \cap R\Big)$
2. $\{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}\ ,\ i < j\} = h\Big(\, g^{-1}\big(\, \{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}\, \big) \cap R\Big)$
3. $\{wc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\} = h\Big(\, g^{-1}\big(\, \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\}\, \big) \cap R\Big)$

Aufgabe 14 (für gute Studierende)
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär

---

Aufgabe 15
Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten einen deterministischen vollständigen endlichen Automaten $M = (K, \Sigma, \delta, s, F)$. Die zu M gehörende Rechtskongruenzrelation $\sim_M$ auf Σ^* habe als Äquivalenzklassen:

$$\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab, ba\}, \{bb\}, \{bb\}\cdot\Sigma^{\geq 1}, \{ba, ab\}\cdot\Sigma^{+},$$
$$\{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^{+} \mid |w| \text{ gerade}\}, \{aa\}\cdot\{w \in \Sigma^{*} \mid |w| \text{ ungerade}\}$$

Weiterhin akzeptiert M u.a. die Wörter b^0, a^1, b^2, ba sowie a^{4711}, und M verwirft u.a. die Wörter b, aa, b^{21}, bab sowie a^{42}.

1. Bestimmen Sie δ, s und F des Automaten M. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise. Geben Sie auch eine graphische Darstellung des Automaten an.
2. Bestimmen Sie die Klassen der zu $L(M)$ gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L(M)}$ auf Σ^*. Kommentieren Sie Ihre Vorgehensweise.
