Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Besprechung in KW 47 / Abgabe in KW 48

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 26

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{aligned}
L_4 &:= \{w \cdot c \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^+\} \\
L_5 &:= \{w \in \{a,b,c\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^4\} \\
L_6 &:= \{a^n c^m b^l \mid n,m,l \in \mathbb{N} \ \wedge \ m \text{ ist Primzahl}\} \\
L_{\text{PAL}} &:= \{w \cdot \overleftarrow{w} \mid w \in \{a,b\}^*\} \\
L_{\text{COPY}} &:= \{w \cdot w \mid w \in \{a,b\}^*\}
\end{aligned}$$

Definition: $\overleftarrow{w}$ ist induktiv definiert vermöge $\overleftarrow{\lambda} := \lambda$ sowie $\overleftarrow{v \cdot x} := x \cdot \overleftarrow{v}$ für $x \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$.

Aufgabe 5
Sei L eine reguläre Sprache über dem Alphabet Σ. Zeigen Sie:

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad \forall A \in \mathcal{P}(L) \text{ mit } |A| > k \quad \exists w, w' \in A \ \ \exists x, x', y, y' \in \Sigma^* \text{ so, dass}$$
$$w \neq w' \ \wedge \ w = x \cdot y \wedge w' = x' \cdot y' \ \wedge \ |x| = \lfloor |w|/2 \rfloor \wedge |x'| = \lfloor w'|/2 \rfloor \ \wedge \ x \cdot y' \in L \wedge x' \cdot y \in L$$

Hinweis: Betrachten Sie die Läufe eines erkennenden DFA. $\mathcal{P}(L)$ bezeichnet die Potenzmenge von L.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 7
Seien A und B beliebige Teilmengen von $\{0,1\}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche sind falsch? Beweisen Sie Ihre Behauptungen!

1. Ist A regulär pumpbar und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär pumpbar.
2. Ist A nicht regulär pumpbar und $A \subseteq B$, so ist auch B nicht regulär pumpbar.
3. Ist A regulär und $B \subseteq A$, so ist auch B regulär.
4. Ist $A \cap B$ regulär, so sind auch A und B regulär.
5. Jede endliche Sprache hat die reguläre Pumping-Eigenschaft.
6. Es gibt eine endliche Sprache über dem Alphabet $\{0,1\}$, welche die reguläre Pumping-Eigenschaft nicht besitzt.
7. $A^+ = A^* \setminus \{\lambda\}$.
8. $A^* = A^+ \cup \{\lambda\}$.
9. Sind A und B regulär, so ist auch $A \setminus B$ regulär.
10. Sind A und B regulär pumpbar, so ist auch $A \cup B$ regulär.

Aufgabe 8
Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1}b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j, l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1}b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^*/\approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 9
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 10
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Wir definieren $L := \{a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, Geben Sie alle Klassen der zur Sprache L gehörenden Relation an.

Aufgabe 11
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 12
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_{21} &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\ L_{22} &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{23} &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_{24} &:= \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{25} &:= \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 13
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen die reguläre Pumping-Eigenschaft haben, jedoch nicht regulär sind.

$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba$ oder bb ist Teilwort von w oder w enthält genau so viele a's wie b's$\}$
$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Quadratzahl$\}$
$L_4 := L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \ \cup \ \{w \in \{a,b\}^* \mid |w|$ ist Primzahl$\}$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zur Sprache gehörende Relation jeweils unendlich viele Klassen hat.

Aufgabe 14
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. $L(A) = L(B) \implies \sim_A = \sim_B$
2. $L(A) = L(B) \implies \approx_{L(A)} = \approx_{L(B)}$
3. $\approx_{L(A)} \supseteq \sim_A$
4. $L(A) \subseteq L(B) \implies \sim_A \subseteq \sim_B$
5. $\approx_{L(A)} \subseteq \approx_{L(B)} \implies \sim_A \subseteq \sim_B$

Aufgabe 15
Wir betrachten eine DFA M. Die zu M gehörige Relation $\sim_M$ auf $\{a,b\}^*$ ist gegeben durch die zu ihr gehörende Klasseneinteilung:
$\{\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab\}, \{ba, bb\}, \{aaw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{abw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{bxw \mid x \in \{a,b\}, w \in \{a,b\}^+\}\}$.

Weiterhin erkenne M keine Wörter mit Länge kleiner 3, ebenso nicht das Wort $(ab)^{42}$. Die Wörter a^{42} und b^{42} hingegen werden erkannt.

Geben Sie den Automaten M an, bestimmen Sie den äquivalenten minimalen Automatem und beschreiben Sie die lassen von $\approx_{L(M)}$ mit regulärer Ausdrücken.

Aufgabe 16
Erkennen die beiden finiten Automaten $M_1 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b\}, \delta_1, 0, \{4,5,6\})$ und $M_2 = (\{0,1,2,3,4,5,6,7\}, \{a,b\}, \delta_2, 0, \{2,5\})$ die gleiche Sprache? δ_1 und δ_2 sind gegeben durch:

δ_1	a	b
0	2	1
1	2	3
2	4	7
3	2	3
4	0	5
5	1	6
6	0	5
7	5	2

δ_2	a	b
0	1	3
1	2	6
2	3	2
3	4	0
4	5	7
5	0	5
6	2	1
7	5	7

Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 17
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Entweder wird L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt oder alle Klassen der zu L gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ sind einelementig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\forall p, q \in \mathbb{N} : a^p \approx_L a^{p+q} \implies \{a^{p+iq} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a^p]_{\approx_L}$

Aufgabe 18
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur unendlich große Klassen hat.
2. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat und L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt wird.
3. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Obermenge $L' \supseteq L$.
4. Werden L und L' von DFA erkannt, so auch $(\{a\} \cdot L) \cup (\{b\} \cdot L')$.
5. Wird L von einem DFA erkannt und wird L' von keinem DFA erkannt, so wird $L \cap L'$ auch von keinem DFA erkannt.
6. Ist $L \cup L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
7. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
8. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle endlich, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch endlich.

Aufgabe 19
Welche Sprachen werden von den folgenden finiten Automaten A_k und B_k mit $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erkannt?

$$A_k := (\{0, \ldots, k\}\,,\, \{a, b\}\,,\, 0\,,\, \Delta_k\,,\, \{k\}) \text{ und}$$
$$B_k := (\{a, b\}^k\,,\, \{a, b\}\,,\, b^k\,,\, \Delta'_k\,,\, \{a\} \cdot \{a, b\}^{k-1})$$

wobei:

$$\Delta_k := \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, a, 1)\} \quad \cup \quad \{(i, x, i+1) \mid i \in \{1, \ldots, k-1\} \wedge x \in \{a, b\}\}$$
$$\Delta'_k := \{(xw, y, wy) \ \mid x, y \in \{a, b\} \wedge w \in \{a, b\}^{k-1}\}$$

Aufgabe 20
Sei $L_k := \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } a\}$ für $k \in N \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für jedes $k \in N \setminus \{0\}$:

1. Es gibt einen NFA mit $k + 1$ Zuständen, der L_k erkennt.
2. Kein vollständiger DFA mit weniger als 2^k Zustände erkennt L_k.
   Hinweis: Denken Sie an die zu L_k gehörende Relation $\approx_{L_k}$.
3. Es gibt einen vollständigen DFA mit 2^k Zuständen, der L_k erkennt.

Hinweis: Denken Sie an Aufgabe 19.

Aufgabe 21
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 22

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$, sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^* mit: $h(a) = ab$, $h(b) = ba$, $h(c) = ccc$; $g(a) = a$, $g(b) = c$, $g(c) = \lambda$

1. Geben Sie $h(L)$, $g(L)$, $h^{-1}(L)$ und $g^{-1}(L)$ für folgende Sprachen L_i an ($i = 1, 2, 3$):
$$L_1 := \{acccaa, ababba, \lambda\}, \quad L_2 := \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}, \quad L_3 := \{wccc\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}.$$
2. Sei $M = (\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}, \{a, b, c\}, \delta, \{1\}, \{5, 6\})$ ein nichtdeterministischer endlicher Automaten, mit δ gegeben durch:

δ	1	2	5	6	7	8
a	$2,5$	5	–	–	–	7
b	–	2	2	–	–	–
c	–	6	–	7	$7,8$	8

Konstruieren Sie NFAs die $h(L(M))$, $g(L(M))$, $h^{-1}(L(M))$ und $g^{-1}(L(M))$ erkennen.

Aufgabe 23

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ L und R reguläre Sprachen über Σ sowie h und g Homomorphismen von Σ^* nach Σ^*. Zeigen Sie, dass dann auch $g\left(h^{-1}(L) \cap R\right)$ regulär ist. [Sie dürfen selbstverständlich die in der Vorlesung gezeigten Sätze benutzen.]

Aufgabe 24

Beweisen Sie mit Hilfe von endlichen Automaten, dass die regulären Sprachen unter Homomorphismus und inversem Homomorphismus abgeschlossen sind. Verwenden Sie im Beweis weder reguläre Ausdrücke noch Grammatiken.

Hinweis: Sei h ein Homomorphismus. Angenommen, L werde vom deterministischen endlichen Automaten M erkannt. Wir erhalten einen endlichen Automaten für $h(L)$, wenn vom Zustand p mit dem Zeichen a in den Zustand q übergegangen wird, der beim Automaten M von p aus mit $h(a)$ erreicht wird. Umgekehrt erhalten wir einen endlichen Automaten für $h^{-1}(L)$, wenn es von p aus einen Pfad für $h(a)$ nach q gibt, falls von p mit a nach q übergegangen wird.

Definition: $h(L) := \{h(x) \mid x \in L\}$, $h^{-1}(L) := \{x \mid h(x) \in L\}$.

Aufgabe 25

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, (0, 0), F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit

$$Q = \{(i, j) \in \mathbb{N} \mid 0 \le i \le 1 \ \wedge \ 0 \le j \le 2\},$$
$$\delta = \{(i, j), a, (i + 1 \bmod 2\ ,\ j\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \le 1\ ,\ j \le 2\ \}$$
$$\cup\{(i, j), b, (i\ ,\ j + 1 \bmod 3\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \le 1\ ,\ j \le 2\}$$
$$\cup\{(i, j), c, (i\ ,\ j - 1 \bmod 3\ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid\ i \le 1\ ,\ j \le 2\}\ , \text{ und}$$
$$F = \{(0, 0)\}.$$

Welche der folgenden Wörtern $abc, aabcc, aa, aabcb, aababaaa$ werden von M akzeptiert? Beschreiben Sie die von M erkannte Sprache. Begründen sie Ihre Antwort.

Aufgabe 26

Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat.
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cup L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cap_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
