Theoretische Informatik

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Besprechung in KW 46 / Abgabe in KW 47

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgabe 16

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Lesen Sie das Übungsblatt vor dem nächsten Übungstermin durch. Recherchieren Sie gegebenenfalls unbekannte Begriffe. Bitte den Aufgabentext bei den Übungstunden zu Verfügung haben.

Aufgabe 4
Sei Σ ein endliches Alphabet. Zeigen Sie:

1. Jede endliche Sprache über Σ wird durch einen finiten Automaten erkannt.
2. Jede endliche Sprache über Σ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben.
3. Jede co-endliche Sprache über Σ wird durch einen finiten Automaten erkannt.
4. Jede co-endliche Sprache über Σ wird durch einen regulären Ausdruck beschrieben.

Definition: Eine Sprache über Σ heißt *co-endlich* genau dann, wenn ihr Komplement endlich ist.

Aufgabe 5
Kann man die reguläre Pumping-Eigenschaft wie folgt abändern?

1. "($\forall w \in L$ mit $|w| \geq k$)" durch "($\forall w \in L$)" ersetzen.
2. "($\forall i \in \mathbb{N}$)" durch "($\forall i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$)" ersetzen.
3. "($\forall w \in L$ mit $|w| \geq k$)" durch "($\forall w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq k$)" ersetzen.
4. Die Bedingung "$v \neq \lambda$" weglassen.

Welche Auswirkungen hätten diese Änderungen? Geben Sie gegebenenfalls Sprachen an, die die geänderte Eigenschaft erfüllen, die ungeänderte Eigenschaft jedoch nicht (oder umgekehrt). Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgenden Sprachen L_i über Σ nicht regulär sind.

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{w \in \{a,b\}^+ \mid \exists n \in \mathbb{N} : |w| = n^5\} \\ L_2 & := & \{wcw \mid w \in \{a,b\}^+\} \\ L_3 & := & \{a^{4n}b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_3 & := & \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Kubikzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat, aber nicht regulär ist.
Hinweis: Betrachten Sie $L \cap L((ab)^*)$.

Aufgabe 8
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$ ein Alphabet. Zeigen Sie mit Hilfe des regulären Pumping-Lemmas, dass die folgende Sprache L über Σ nicht regulär sind.

$$L := \{a^i b^j c^p \mid i,j,p \in \mathbb{N} \text{ und } i \cdot j = p\}$$

Aufgabe 9
.Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$. Eine Relation $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ ist eine *Rechtskongruenzrelationen* auf $(\Sigma^*, \cdot)$ genau dann wenn R eine Äquivalenzrelation auf Σ^* ist und zusätzlich gilt:

$$\forall x,y \in \Sigma^* \quad : \quad xRy \Longrightarrow (\forall z \in \Sigma^* : x \cdot z \; R \; y \cdot z)$$

Entscheiden Sie, ob die folgenden Relationen Rechtskongruenzrelationen auf $(\Sigma^*, \cdot)$ sind oder nicht, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

1. $wR_1v :\Leftrightarrow$ in w kommen genau soviele a vor wie in v.
2. $wR_2v :\Leftrightarrow$ es gibt ein Zeichen aus Σ, das in w genau so oft vorkommt wie in v.
3. $wR_3v :\Leftrightarrow$ alle Zeichen, welche in w vorkommen, kommen auch in v vor.
4. $wR_4v :\Leftrightarrow$ alle Zeichen, welche in w vorkommen, und nur diese, kommen in v vor.

Bemerkung: Rechtskongruenzen spielen im Verlauf der nächsten Vorlesungen eine wichtige Rolle. Deshalb ist es sinnvoll, sich vorher mit dem Begriff vertraut zu machen.

Aufgabe 10
Sind die folgenden Relationen R und S Rechtskongruenzrelationen auf $(\{a,b\}^*, \cdot)$?

1. Die Relation R auf $\{a,b\}^*$ ist gegeben durch die zu ihr gehörende Klasseneinteilung: $\{\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa, ba, ab, bb\}, \{aaw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{abw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{bxw \mid x \in \{a,b\}, w \in \{a,b\}^+\}\}$.
2. Die Relation S auf $\{a,b\}^*$ ist gegeben durch die zu ihr gehörende Klasseneinteilung: $\{\{\lambda\}, \{a\}, \{b\}, \{aa\}, \{ab\}, \{ba, bb\}, \{aaw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{abw \mid w \in \{a,b\}^+\}, \{bxw \mid x \in \{a,b\}, w \in \{a,b\}^+\}\}$.

Aufgabe 11
Sei $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definieren wir die Relation $\mathcal{R}$ vermöge:

$$x \mathcal{R} y \;:\Longleftrightarrow x \equiv y \bmod k$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}$ eine Rechtskongruenzrelation auf $(\mathbb{Z}, +)$ und auf $(\mathbb{Z}, \cdot)$ ist.

Aufgabe 12
Sei $L := \{a^n b^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Zeigen Sie:

1. Die Wörter aus $\{a\}^*$ sind paarweise nicht äquivalent (bzgl. $\approx_L$).
2. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
3. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^{i+1}b^{2i+3}] = \{a^j b^l \mid j,l \in N \wedge l > 0 \wedge 3j - l = i\}$.
4. $\Sigma^*/\approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \big\{[a^{i+1}b^{2i+3}] \mid i \in \mathbb{N}\big\} \cup \{[b]\}$.

Hinweis: $\Sigma^*/\approx_L$ bezeichnet die Menge aller Äquivalenzklassen von $\approx_L$ auf Σ^*.

Aufgabe 13
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ ein Alphabet. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_0 &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_1 &:= \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_2 &= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 14
Sei $n_0 := 0$ und $n_{i+1} := n_i + 2i + 1$ für $i \in \mathbb{N}$, weiter sei $Q := \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Wir betrachten die Sprache $L := \{a^j \mid j \in Q\}$ über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$, sowie die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$. Zeigen Sie:

1. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $[a^i] = \{a^i\}$.
2. $\Sigma^* / \approx_L = \big\{\{a^i\} \mid i \in \mathbb{N}\big\}$.
3. $L = \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 15
Wir betrachten das Alphabet $\Sigma = \{a\}$. Geben Sie jeweils alle Klassen der zu folgenden Sprachen gehörenden Relationen an:

$$\begin{aligned} L_{21} &:= \{a^n \mid n \in \mathbb{N} \wedge n < 5\} \\ L_{22} &:= \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{23} &:= \{a^p \mid p \in \mathbb{N} \wedge p \text{ ist Primzahl}\} \\ L_{24} &:= \{a^{(2^n)} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ L_{25} &:= \{(a^2)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

Aufgabe 16
Zeigen Sie, dass $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid aa$ ist Teilwort von w oder bb ist Teilwort von w oder $|w|$ ist eine Quadratzahl$\}$ die reguläre Pumpingeigenschaft hat, aber nicht regulär ist.